פתרון מבחן לדוגמא – מבוא לאנליזה 2 למורים – 88-612-01

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את:

א. $\int x^2 \ln\left(x^2+x+1\right)dx$

ראשית נעשה אינטגרציה בחלקים:

$$\int x^2 \ln\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3\left(2x+1\right)}{x^2+x+1}dx$$

כעת נבצע חילוק פולינומים ונקבל כי

$$\frac{x^3\left(2x+1\right)}{x^2+x+1}=2x^2-x-1+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

לכן

$$\int\frac{x^3\left(2x+1\right)}{x^2+x+1}dx=\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

באינטגרל $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ המונה הוא נגזרת המכנה ולכן $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln\left(\left|x^2+x+1\right|\right)$

סה"כ

$$\int x^2 \ln\left(x^2+x+1\right)dx=\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-x+\ln\left(x^2+x+1\right)\right)+C$$

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות $x,\sqrt{x}$ בקטע $[0,2]$

ראשית נמצא את נקודות החיתוך בין שני הגרפים $x=\sqrt{x}$.

נעלה בריבוע $x^2=x$, לכן $x(x-1)=0$ ונקודות החיתוך הן $0,1$.

נציב $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ ונגלה שבתחום $[0,1]$ הפונקציה $\sqrt{x}$ גבוהה יותר מ x ובתחום $[1,2]$ ההפך.

לכן השטח הכלוא הוא:

$$\int_0^1\left(\sqrt{x}-x\right)dx+\int_1^2\left(x-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$$

.2

א. מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $\frac{x\cdot\arctan(x)}{\ln\left(1+x^4\right)}$

<u>אסימפטוטות אנכיות</u>:

הפונקציה אינה רציפה ב $x=0$ ונקודה זו חשודה לאסימפטוטה אנכית.

נחשב את הגבול בנקודה:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\arctan(x)}{\ln\left(1+x^4\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{\ln\left(1+x^4\right)}\frac{\arctan(x)}{x}\frac{1}{x^2}=1\cdot1\cdot\infty=\infty$$

לכן יש אסימפטוטה אנכית $x=0$.

<u>אסימפטוטה משופעת מימין</u>:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(x)}{\ln\left(1+x^4\right)}=0$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\arctan(x)}{\ln\left(1+x^4\right)}-0$$

נחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln\left(1+x^4\right)}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{4x^3}{1+x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^4}{4x^3}=\infty$

לכן $n=\frac{\pi}{2}\cdot\infty=\infty$ <u>ואין</u> אסימפטוטה משופעת מימין.

<u>אסימפטוטה משופעת משמאל:</u>

$$m=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{\arctan(x)}{\ln\left(1+x^4\right)}=0$$

כעת בעזרת חישוב דומה

$$n=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x\cdot\arctan(x)}{\ln\left(1+x^4\right)}-0=-\infty\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\infty$$

ושוב אין אסימפטוטה אנכית. זה לא מפתיע, כיוון שהפונקציה זוגית.

ב.   קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^{2}(x)}dx$

נבצע הצבה

$$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x\ln^{2}(x)}dx=\begin{Bmatrix}t=\ln(x)\\ dt=\frac{1}{x}dx\end{Bmatrix}=\int_{\ln(2)}^{\infty}\frac{1}{t^{2}}dx$$

ידוע שהאינטגרל שקיבלנו <u>מתכנס</u>.

.3

א.   חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{1}^{\ln(x)}\frac{1}{t}dt}{\ln(x)}$

ראשית, ידוע כי $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{t}dt=\infty$ ולכן המונה שואף לאינסוף.

כיוון שגם המכנה שואף לאינסוף, נשתמש בכלל לופיטל ונקבל כי:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{1}^{\ln(x)}\frac{1}{t}dt}{\ln(x)}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}-0}{\frac{1}{x}}=0$$

ב.   חשבו את גבול הסדרה $a_{n}=\frac{1^{3}+2^{3}+...+n^{3}}{n^{4}}$

נראה כי אלה סכומי רימן של הפונקציה הרציפה $f(x)=x^{3}$

$$a_{n}=\frac{1^{3}+2^{3}+...+n^{3}}{n^{4}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{3}}{n^{4}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{3}\to\int_{0}^{1}x^{3}dx=\frac{1}{4}$$

.4

א. חשבו את $\int_0^1 e^{\left(x^3\right)}dx$ עד כדי שגיאה של $h=0.01$

ידוע כי $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

לכן $e^{\left(x^3\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}$.

לכן $\int_0^1 e^{\left(x^3\right)}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{3n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(3n+1\right)n!}$

ננחש ש $\int_0^1 e^{\left(x^3\right)}dx\approx\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{\left(3n+1\right)n!}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7\cdot 2!}+\frac{1}{10\cdot 3!}+\frac{1}{13\cdot 4!}+\frac{1}{16\cdot 5!}$ הוא קירוב מספיק טוב, ונוכיח את זה.

ידוע כי $n!\geq 2^{n-1}$ לכל $n\geq 1$ ולכן נחסום את השגיאה:

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{\left(3n+1\right)n!}\leq\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{16\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{2^{n+3}}=\frac{1}{2^9}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\right)=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{128}<0.01$$

שימו לב כי $3n+1>16$ כיוון ש $n\geq 6$.

ב. מצאו את $f^{(57)}(0)$ עבור $f(x)=e^{\left(x^3\right)}$

חישבנו כבר את טור הטיילור $e^{\left(x^3\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}$.

המקדם של x^{57} הוא $\frac{1}{19!}$ ולכן $\frac{f^{(57)}(0)}{57!}=\frac{1}{19!}$ ולכן $f^{(57)}(0)=\frac{57!}{19!}$

5. יהיו שני טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n , \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ עם רדיוסי התכנסות r_1, r_2

א. הוכיחו/הפריכו: רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ הוא $\min\{r_1, r_2\}$

<u>הפרכה:</u>

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס בתחום $|x|<1$ ולכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא $r=1$ וכך כמובן גם המצב עבור מינוס הטור $\sum_{n=0}^{\infty} -x^n$.

טור הסכום הוא $\sum_{n=0}^{\infty} 0$ המתכנס בכל הממשיים ולכן רדיוס ההתכנסות שלו הוא $\infty \neq \min\{1,1\}$

ב. נתון כי $r_1 \neq r_2$. הוכיחו את הטענה בסעיף א'

<u>הוכחה:</u>

נניח כי $r_1 > r_2$. לכן בתחום $|x| < r_2$ שני הטורים מתכנסים, ולכן גם הסכום שלהם מתכנס.

בתחום $r_2 < |x| < r_1$ טור אחד מתכנס, והשני מתבדר, ולכן הסכום שלהם מתבדר.

לכן $r_2 = \min\{r_1, r_2\}$ הוא המספר הגדול ביותר כך שסכום הטורים מתכנס עבור $|x|$ שקטן ממנו, כלומר הוא רדיוס ההתכנסות של הטור.

שימו לב, הוכחה זו לא עובדת בסעיף א', כי במצב ש $r_1 = r_2$ בתחום $r_1 < |x|$ שני הטורים מתבדרים וייתכן שהסכום שלהם דווקא מתכנס, כמו שראינו בדוגמא.