אינפי 1 - תרגיל 2

1. הוכח ש $\sqrt{3}$ אינו רציונאלי

פתרון:

נניח בשלילה ש $\sqrt{3}$ רציונאלי, לכן הוא שווה לשבר המצומצם $\frac{p}{q}=\sqrt{3}$ נעלה בריבוע $p^2=3q^2$. לכן p מתחלק בשלוש, כלומר $p=3p'$ עבור p' כלשהוא, לכן $p^2=9p'=3q^2$ לכן $3p'=q$ לכן q גם מתחלק ב3 כמו p בסתירה לכך שהשבר מצומצם.

2. יהי $x\in\mathbb{R}$ מספר ממשי המקיים $x\geq 0$. נניח בנוסף $\forall\varepsilon>0: x<\varepsilon$. הוכח/הפרך: $x=0$.

הוכחה:

נניח בשלילה $x\neq 0$, לכן לפי הנתון $x>0$. ניקח $\varepsilon=\frac{x}{2}$, לכן $0<\varepsilon<x$ בסתירה לנתון ש**לכל** $0<\varepsilon$ מקיים $x<\varepsilon$.

3. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שקיים $\varepsilon>0$ כך ש $\forall a\in A: a>\varepsilon$ הוכח שאפס אינו החסם התחתון של A.

הוכחה:

נניח בשלילה שאפס הינו החסם התחתון של A. ניקח $0<\frac{\varepsilon}{2}$. ברור ש $\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ ולכן $\forall a\in A: a>\frac{\varepsilon}{2}$

כלומר $\frac{\varepsilon}{2}$ חסם מלרע גדול מאפס, בסתירה לכך שאפס הינו החסם מלרע הקטן ביותר.

4. תהיי $B=\left\{(-1)^{n-1}(2+\frac{3}{n}) \mid n\in\mathbb{N}\right\}$. מצא חסם עליון, חסם תחתון, מינימום ומקסימום (כאשר הם קיימים)

תשובה: מקסימום 5, מינימום $-3\frac{1}{2}$

5. יהיו קבוצות לא ריקות $A,B\subseteq\mathbb{R}$, נניח שמתקיים $\forall a\in A,\forall b\in B: a\leq b$ (כל איבר בA קטן שווה מכל איבר בB)

*א. הוכח: $\sup A\leq\inf B$ (תרגיל חשוב מאד. יש להשתמש באפסילון)

פתרון: נניח בשלילה ש$\sup A>\inf B$ ניקח $\varepsilon=\frac{\sup A-\inf B}{2}>0$ אזי

$\sup A-\varepsilon=\frac{\sup A+\inf B}{2}$ שזה אמצע הקטע $[\inf B,\sup A]$. אבל לפי משפט קיים $a\in A$ כך ש $a>\sup A-\varepsilon$.

$\sup A - \varepsilon = \dfrac{\sup A + \inf B}{2} = \inf B + \varepsilon$ אבל לפי משפט קיים $b \in B$ כך ש $a < \sup A + \varepsilon = \inf B - \varepsilon < b$. ובסיכום מצאנו $a < b$ בסתירה לנתון.

ב. נניח שמתקיים שיוויון בסעיף א', כלומר, $\sup A = \inf B$. הוכח/הפרך: $A \cap B \neq \phi$.
(במילים: יש איבר שנמצא גם ב A וגם ב B).

הפרכה: ניקח $A = (0,1)$ ו- $B = (1,2)$. $\sup A = \inf B = 1$ אבל $A \cap B = \phi$.

ג. אם הוכחת בסעיף ב', מה הוא האיבר המשותף ל A ו B? אם הפרכת, מתי כן יהיה לשתי הקבוצות איבר משותף?

תשובה: האיבר המשותף יתקיים כאשר ל A יהיה מקסימום, ול B יהיה מינימום. ואז $\sup A \in A$ ו $\inf B \in B$.

6. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, נתון $0 \notin A$. נגדיר את הקבוצה A^{-1} באופן הבא $A^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} \mid a \in A \right\}$. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

א. אם A חסום מלעיל אזי A^{-1} חסום מלעיל

ב. אם A חסום מלעיל אזי A^{-1} חסום מלרע

ג. אם A^{-1} חסום מלעיל אזי A חסום מלעיל

ד. אם A^{-1} חסום מלעיל אזי A חסום מלרע

הפרכה: ניקח $A = (-1,0) \cup (0,1) = \{x \in R \mid -1 < x < 0, or, 0 < x < 1\}$. A חסום על ידי ± 1 אבל A^{-1} אינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע (שכן אחד חלקי מספר קטן חיובי הולך לאינסוף, ואחד חלקי מספר קטן שלילי הולך למינוס אינסוף). $(A^{-1})^{-1} = A$ ולכן גם הכיוונים ההפוכים לא נכונים.

7. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נגדיר $B = \{-a \mid a \in A\}$ הוכח ש B חסום מלרע וש- $\inf B = -\sup A$

פתרון: A חסום מלעיל, נניח על ידי M כלומר $\forall a \in A : a \leq M$ לכן $\forall a \in A : -M \leq -a$ כלומר B חסום מלרע ע"י $-M$. כמו כן, אם M הינו חסם המלעיל הקטן ביותר של A, וודאי ש $-M$ הינו חסם המלרע הקטן ביותר של B (קל להוכיח).

8. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש $\forall a \in A: a > 0$ ותהיי $A^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} \mid a \in A \right\}$.

הוכח ש m חסם תחתון של A $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{m}$ חסם עליון של A^{-1} (ואפס חסם תחתון של A אם"ם A^{-1} לא חסומה).

הוכחה: דבר ראשון, אם $m = 0$ אזי A^{-1} לא חסומה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $a < 0 + \varepsilon = \varepsilon$ (כי $m = 0$ חסם תחתון) לכן לכל $M > 0$ ניקח $\varepsilon = \frac{1}{M}$ ולכן קיים $a \in A$ כך ש $a < \varepsilon = \frac{1}{M}$ ולכן $\frac{1}{a} > M$ כלומר A^{-1} לא חסומה. בכיוון ההפוך, אם A^{-1} לא חסומה אז לכל $M > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $\frac{1}{a} > M$. לכן לכל $\varepsilon > 0$ ניקח $M = \frac{1}{\varepsilon}$ ולכן קיים $a \in A$ כך ש $\frac{1}{\varepsilon} = M < \frac{1}{a}$ ולכן $a < \varepsilon$. נובע מכך החסם התחתון של A הוא אפס כי הוא חסם מלרע שמקיים את התנאי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $a < 0 + \varepsilon$.

כעת, נניח $m \neq 0$ לכן $\forall a \in A: m \leq a$ ולכן $\forall a \in A: \frac{1}{a} \leq \frac{1}{m}$ כלומר $\frac{1}{m}$ חסם מלעיל של A^{-1}. נניח M_1 חסם מלעיל קטן יותר ל A^{-1} כלומר $M_1 < \frac{1}{m}$ ו $\forall a \in A: \frac{1}{a} \leq M_1$. אבל אז $\forall a \in A: \frac{1}{M_1} \leq a$ כלומר $\frac{1}{M_1}$ חסם מלרע של A. אבל $M_1 < \frac{1}{m}$ ולכן $\frac{1}{M_1} > m$ בסתירה לכך ש m חסם תחתון.

בכיוון ההפוך, נניח $\frac{1}{m}$ חסם עליון של A^{-1}. נגדיר $B = A^{-1}$ ולכן $B^{-1} = A$ והטענה נובעת מהכיוון שהוכחנו.