

אינפי' תשע"ט – תרגול 1

הבינום של ניוטון

נתחיל ממקרים פרטיים:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

(הנוסחאות השניה והרביעית הן מקרה פרטי של הנוסחאות הראשונה והשלישית בהתאמה, כאשר מציבים $-b$ במקום b).

תרגיל: פתחו סוגריים בביטוי $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$.

פתרון:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 &= \\(\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 &= \\3\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} &= \\9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}\end{aligned}$$

המקרה הכללי:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{באשר} \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- יש מקש מיוחד במחשבון עבור נוסחה זו.
- כמו כן ניתן למצוא את המקדמים הבינומיים ע"י משולש פסקל (להדגים). את ההסבר לנכונות השיטה תראו בקורס מתמטיקה בדידה.

תרגיל: פתחו סוגריים לפי נוסחת הבינום של ניוטון:

- $(a + b)^4$
- $(a - b)^5$
- $(x + 3y^2)^5$
- $(x^2 - \frac{1}{x})^5$

פתרון: נמצא את המקדמים לפי משולש פסקל:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad .1$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \quad .2$$

$$\begin{aligned} (x + 3y^2)^5 &= x^5 + 5x^4(3y^2) + 10x^3(3y^2)^2 + 10x^2(3y^2)^3 + 5x(3y^2)^4 + (3y^2)^5 = \\ &= x^5 + 15x^4y^2 + 10x^3(9y^4) + 10x^2(27y^6) + 5x(81y^8) + 243y^{10} = \\ &= x^5 + 15x^4y^2 + 90x^3y^4 + 270x^2y^6 + 405xy^8 + 243y^{10} \end{aligned} \quad .3$$

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^4 &= (x^2)^4 + 4(x^2)^3 \frac{1}{x} + 6(x^2)^2 \frac{1}{x^2} + 4x^2 \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \\ &= x^8 - 4x^5 + 6x^2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4} \end{aligned} \quad .4$$

כפל בצמוד

נשתמש בנוסחאות כפל מקוצר:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

תרגיל: כתבו את המספרים הבאים ללא שורש במכנה:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad .1$$

$$\frac{11\sqrt{5}}{4-\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{5}(4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})} = \frac{44\sqrt{5}+11\sqrt{15}}{13} \quad .2$$

תרגיל: היעזרו בכפל בצמוד כדי להביא את הביטויים הבאים לצורה ללא שברים:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+1}-2)} = \frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{x+1-4} = \frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{x-3} = \sqrt{x+1} + 2 \quad .1$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}-1} &= \frac{(\sqrt{\sin x}+1)\cos^2 x}{(\sqrt{\sin x}+1)(\sqrt{\sin x}-1)} = \frac{(\sqrt{\sin x}+1)\cos^2 x}{\sin x-1} = \frac{(\sqrt{\sin x}+1)(1-\sin^2 x)}{\sin x-1} = \\ &= \frac{(\sqrt{\sin x}+1)(1-\sin x)(1+\sin x)}{-(1-\sin x)} = -(\sqrt{\sin x} + 1)(1 + \sin x) \end{aligned} \quad .2$$

$$\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8} = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4 \quad .3$$

חזרה על טכניקה אלגברית

תרגיל: פשטו את הביטוי הבא ככל הניתן:

$$\left(\frac{-5x^2 - 4x - 2}{9x^2 - 1} + \frac{x - 1}{3x + 1} + \frac{2x + 1}{3x - 1}\right) \cdot \frac{36x^2 + 24x + 4}{4x^2 + 13x - 12}$$

פתרון:

נטפל קודם כל בסוגריים השמאליים: המכנה השמאלי מתפרק לפי כפל מקוצר ל- $(3x - 1)(3x + 1)$ לכן זהו המכנה המשותף ונקבל: $\frac{-5x^2 - 4x - 2 + (3x - 1)(x - 1) + (2x + 1)(3x + 1)}{(3x - 1)(3x + 1)}$ כלומר $\frac{x(4x - 3)}{(3x - 1)(3x + 1)}$

כעת נטפל בשבר הימני. המונה הוא $4(9x^2 + 6x + 1)$ וע"י כפל מקוצר נקבל $4(3x + 1)^2$.

במכנה: רוצים 2 מספרים שמכפלתם -48 וסכומם -13 כלומר הם -16,3 לכן הפתרונות הם

$$4(x + 4)\left(x - \frac{3}{4}\right) = (x + 4)(4x - 3) \quad x_{1,2} = \frac{-16}{4}, \frac{3}{4} = -4, \frac{3}{4}$$

כעת נוכל לכפול את שני השברים:

$$\frac{x(4x - 3)}{(3x - 1)(3x + 1)} \cdot \frac{4(3x + 1)^2}{(x + 4)(4x - 3)} = \frac{4x(3x + 1)}{(3x - 1)(x + 4)}$$

תרגיל: פשטו את הביטוי הבא ככל הניתן:

$$\frac{n^4 - m^4}{n^2 - 3nm + 2m^2} \cdot \frac{n^2 - nm - 2m^2}{n^2 + m^2}$$

פתרון:

$$\frac{n^4 - m^4}{n^2 - 3nm + 2m^2} \cdot \frac{n^2 - nm - 2m^2}{n^2 + m^2} = \frac{(n^2 - m^2)(n^2 + m^2)}{(n - 2m)(n - m)} \cdot \frac{(n - 2m)(n + m)}{n^2 + m^2} =$$

I.

$$= \frac{(n - m)(n + m)(n^2 + m^2)}{(n - 2m)(n - m)} \cdot \frac{(n - 2m)(n + m)}{n^2 + m^2} = (n + m)^2$$

תרגיל: פתרו את המשוואה $\sqrt{x + 5} - \sqrt{8 - x} = 1$.

פתרון: תחום ההגדרה של המשוואה הוא $-5 \leq x \leq 8$. נעביר אחד השורשים אגף (לא חובה)

$$x + 5 = 1 + 2\sqrt{8 - x} + 8 - x \quad \sqrt{x + 5} = 1 + \sqrt{8 - x}$$

נבודד את השורש $\sqrt{8 - x} = x - 2$ והעלאה נוספת בריבוע תתן $x_{1,2} = -1, 4$. שני הפתרונות בתחום הגדרה. כמו כן חובה לבדוק את הפתרונות בגלל פעולת ההעלאה בריבוע שאיננה הפיכה. הפתרון -1 נפסל וסה"כ הפתרון של המשוואה הוא $x = 4$.

תרגיל: חשבו ללא מחשבון:

$$\frac{16^{16} 18^{18}}{6^{36} 2^{49}}$$

פתרון:

$$\frac{16^{16} 18^{18}}{6^{36} 2^{49}} = \frac{(2^4)^{16} (2 \cdot 3^2)^{18}}{(2 \cdot 3)^{36} 2^{49}} = \frac{2^{64} \cdot 2^{18} \cdot 3^{36}}{2^{36} 3^{36} 2^{49}} = 2^{64+18-36-49} 3^{36-36} = 2^{-3} = 0.125$$

תרגיל: נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

פשטו את הביטוי הבא ככל הניתן:

$$\frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

פתרון:

$$\frac{f(x+a) - f(x)}{a} = \frac{\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}}{a} = \frac{\frac{x - (x+a)}{x(x+a)}}{a} = \frac{\frac{x - (x+a)}{x(x+a)}}{a} = \frac{-1}{x(x+a)}$$

תרגיל: נתונה הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{x}$$

פשטו את הביטוי הבא ככל הניתן:

$$\frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

פתרון:

$$\frac{f(x+a) - f(x)}{a} = \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}{a} = \frac{a}{a(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$$