אינפי 2 – תרגיל 7

1.

a. תהי f רציפה ב$[a,b]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$ הוכח ש $g(x)=f(x+\alpha)$ אינטגרבילית ב $[a-\alpha,b-\alpha]$ ומתקיים $\int_a^b f(x)dx=\int_{a-\alpha}^{b-\alpha} g(x)dx$

b. תהי f רציפה ב$[-L,L]$ ומחזורית עם מחזור $2L$, ויהי $c\in\mathbb{R}$. הוכח ש f אינטגרבילית ב$[c,c+2L]$ ומתקיים $\int_{-L}^{L} f(x)dx=\int_{c}^{c+2L} f(x)dx$. האם f רציפה על כל הממשיים?

2.

a. תהי f אינטגרבילית ב$[a,b]$, הוכח ש $|f|$ אינטגרבילית בקטע (רמז: משפט שהוכחנו בתרגיל)

b. יהיו f,g אינטגרביליות ב$[a,b]$. הוכח שהפונקציות $\max(f,g)$ ו $\min(f,g)$ אינטגרביליות ב$[a,b]$. (רמז: הצג את הפונקציות האלה באמצעות f,g וערכים מוחלטים)

3.

a. חשב את אורך העקום של הפונקציה $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ בקטע $[a,b]$.

b. תהי f גזירה על כל הממשיים. הוכח שלכל $M>0$ קיים קטע $[a,b]$ כך שאורך העקומה של הפונקציה בקטע זה גדול מ M.

4. תהי f רציפה ב$[a,b]$ הוכח ש $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$. (תזכורת מאינפי 1: תהי סדרה a_n. אם לכל $\varepsilon>0$ קיימות סדרות $c_n\to L+\varepsilon$, $d_n\to L-\varepsilon$ כך ש $\forall n: d_n\le a_n\le c_n$ אזי $a_n\to L$)

5. חשבו את גבול הסדרה $b_n=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} ie^{\frac{i^2}{n^2}}$

6. חשב את האינטגרלים הבאים:

a. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

b. $\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}dx$ (רמז: הצבה טריגונומטרית)

7. חשבו את $\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt$ עבור $f(t)$ רציפה.