תרגילים על משטחים:

1. משטחי סיבוב.
חקרו את משטחי הסיבוב הבאים: מצא תבניות יסודיות, סימני קריסטופל, העתקת ויינרגטן, עקמומיות גאוס ועקמומיות חציונית.
   א. ספירה: $\gamma(t) = (a\sin t, 0, a\cos t)$, $0 < t < \pi$
   ב. היפרבולואיד חד יריעתי: $\gamma(t) = \left(\sqrt{t^2 + r}, 0, t\right)$, $-\infty < t < \infty$

2. יהי משטח סגור (חסום ובלי שפה) $S \subseteq \mathbb{R}^3$. הוכיח שיש נקודה על המשטח עם עקמומיות גאוס חיובית:

3. שאלה על נוסחאות
   א. בטא את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij}.
   ב. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma_{ij}^k X_k' + L_{ij}N\right)$ הוא סימטרי ביחס ל- j ו- k.
   ג. מצא את היחס בין L_{ij} לבין L_l^k.
   ד. הוכח שהביטוי $L_{i[j}L_{l]}^k$ הוא פנימי (הבא אותו במונחים של מקמי המטריקה, מקדמי כריסטופל, ו/או נגזרותיהם).

4. תהי עקומה $\beta = X \circ \alpha$ על משטח בפרמטריזציה X. נניח שלכל $t > 0$, הוקטור $\beta''(t)$ הוא פרופורציונלי לוקטור $X_1' \times X_2'$. מצאו זוג משוואות דיפרנציאלית שמקויימות על ידי הרכיבים α^1, α^2 של α.

5. תהי עקומה $\gamma(t) = \left(f(t), 0, g(t)\right)$ במהירות יחידה $(t_1 < t < t_2)$ ויהי X שמטח הסיבוב שלה.
   א. הביאו את שטח המשטח לפי הפונקציה f.
   ב. מצאו את השטח במקרה ש γ הוא מעגל ברדיוס β, שמרכזו מרוחק מרחק α מציר ה- z.

6. תהי פרמטריזציה $X(u, v)$ של משטח.
   א. הגדר את העקמומיות הראשיות k_1, k_2 של פרמטריזציה.
   ב. עם התבניות הראשונה והשנייה מקיימות $g_{12} \equiv L_{12} \equiv 0$, בחר בסיס מתאים והבא את העתקת ווינגרטן כמטריצה ריבועית.
   ג. בתנאים של ב', הבאה את הגודל $\frac{k_1}{k_2}$ לפי האיברים של התבניות הראשונה והשנייה.
   ד. חשב את $\frac{k_1}{k_2}$ עבור משטח הסיבוב של העקומה $y = 0, x = z^2 + \frac{1}{4}$.

7. עבור פונקציה $f(x, y) = \frac{a}{y}$, ותהי המטריקה $f^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$.
   א. מצא תחום מקסימאלי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ שבו מוגדרת המטריקה.
   ב. חשב את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k של המטריקה.
   ג. הגדרת את אופרטור לפלס בלטרמי למטריקה איזוטרמית.
   ד. חשב את עקמומיות גאוס של המטריקה לפי מקדמי קריסטופל
   ה. חשב את עקמומיות גאוס של המטריקה לפי אופרטור לפלס בלטרמי.
   ו. כתוב את המשוואות הגאודזיות של המטריקה.

8. עבור פונקציה $f(x,y)=\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^{-1}$, ותהי המטריקה $f^2(x,y)(dx^2+dy^2)$.

א. מצא תחום מקסימאלי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ שבו מוגדרת המטריקה.

ב. חשב את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k של המטריקה.

ג. תנו ארבעה שיטות לחישוב של עקמומיות גאוס של משטח.

ד. הסבירו אילו מהשיטות יכולות לפעל פה.

ה. חשב את עקמומיות Gauss של מטריקה $f^2(x,y)(dx^2+dy^2)$.

ו. כתוב את המשוואות הגאודזיות של המטריקה.