# תרגיל בית 5 מבוא לחוגים ומודולים
# 88-212 סמסטר ב' תשע"ז

**הוראות** זכרו למלא ולהגיש את הדו"ח.

**שאלה 1** (מיקום לא רגולרי). יהי $R$ חוג, ויהי $S \subseteq Z(R)$ תת־מונואיד כפלי של $R$. נסמן איברים של $R \times S$ תחת היחס $(s,r) \sim (s',r')$ אם קיים $t \in S$ כך ש-$trs' = tr's$. בדומה למה שעשינו בכיתה, נסמן מחלקת שקילות תחת היחס הזה ב-$\frac{r}{s}$ ואת אוסף כל מחלקות השקילות ב-$S^{-1}R$, ונגדיר על $S^{-1}R$ פעולות חיבור וכפל כצפוי.

א. הוכיחו כי $\sim$ הוא אכן יחס שקילות. בנוסף, הראו שכאשר איברי $S$ הם רגולריים, אז היחס הזה מתלכד עם היחס של מיקום שלמדנו בכיתה.

ב. הוכיחו $S^{-1}R = \{0\}$ אם ורק אם $0 \in S$ אם ורק אם קיים ב-$S$ איבר נילפוטנטי. (בסימון $\{0\}$ הכוונה לחוג האפס שהוא חוג בלי יחידה עם איבר אחד.)

ג. תהי $\iota\colon R \to S^{-1}R$ המוגדרת לפי $\iota(r) = \frac{r}{1}$. הוכיחו כי $\iota$ חח"ע אם ורק אם כל איברי $S$ הם רגולריים.

ד. הוכיחו שאם $S \subseteq R^{\times}$, אז $\iota$ על. מצאו תנאי מספיק שגם ההפך יהיה נכון.

ה. העשרה: קראו את המאמר "חוגי שברים בדרך הקשה" מאת חוזה פליפה ולוך ובדקו שזה למעשה יותר קל.

**שאלה 2.** יהי $F$ שדה. הוכיחו שהחוג הבא הוא מקומי:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in F \right\}$$

**שאלה 3.** יהי $R$ חוג. נסמן ב-$\mathrm{Spec}(R)$ את אוסף האידאלים הראשוניים שלו. לכל תת־קבוצה $S \subseteq R$ נגדיר

$$V(S) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \,|\, S \subseteq P\}$$

א. הוכיחו שאם $I, J \lhd R$ אידאלים, אז $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

ב. הוכיחו שאם $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ אוסף של אידאלים, אז $\bigcap_\alpha V(I_\alpha) = V(\sum_\alpha I_\alpha)$.

ג. רשות למי שמכיר: הוכיחו שבסעיפים הקודמים הגדרנו טופולוגיה על $\mathrm{Spec}(R)$.

**שאלה 4.** יהי $d \in \mathbb{N}$ חופשי מריבועים. הוכיחו ששדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ הוא $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

**שאלה 5.** לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] = S^{-1}\mathbb{Z}$ כאשר $S = \left\{ n^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ בדומה למה שעשינו בכיתה. יהי $p$ מספר ראשוני.

א. מצאו את האידאלים של $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$.

ב. הוכיחו שלא קיים חוג $\mathbb{Z} \subsetneq R \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ המוכל ממש בין החוגים.

ג. הוכיחו שאם $m|n$, אז $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \subseteq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$. הוכיחו שאם $n \nmid m^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$, אז זו הכלה ממש.

ד. מצאו סדרת מספרים $n_1, n_2, n_3, \ldots$ כך שבשרשרת החוגים

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_1}\right] \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_2}\right] \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_3}\right] \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{Q}$$

יש הכלה ממש.

**שאלה 6.** יהי $R$ חוג חילופי. הוכיחו שחוג פולינומים ביותר ממשתנה אחד מעל $R$ אינו תחום ראשי. רמז: גרסה קלה יותר תבקש להוכיח שהאידאל $\langle x, y\rangle$ אינו ראשי בחוג $\mathbb{Q}[x, y]$.

בהצלחה!