טענה: כל קבוצה פתוחה $V \subseteq \mathbb{R}^2$ היא מדידה לבג.

הוכחה:

תהי $V \subset \mathbb{R}^2$ פתוחה.

באינדוקציה, נגדיר סדרה בת מנייה $\{P_n\}_n$ של מלבנים פתוחים כך ש- $V = \bigcup_n P_n$.
באופן הבא:

ראשית, נגדיר $V_1 := V$.

V_1 פתוחה ולכן $V_1 \cap \mathbb{Q}^2 \neq \phi$.

לכן, ניתן לבחור $q^1 = (q_1^1, q_2^1) \in V_1 \cap \mathbb{Q}^2$.

ומכיון ש V_1 פתוחה, קיים $\varepsilon_1 > 0$ כך ש-

$$P_1 := \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} |x_1 - q_1^1| < 2\varepsilon_1 \\ |x_2 - q_2^1| < 2\varepsilon_1 \end{array} \right\} \subseteq V_1 .$$

כעת נגדיר: $V_2 := V_1 \setminus \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} |x_1 - q_1^1| \le \varepsilon_1 \\ |x_2 - q_2^1| \le \varepsilon_1 \end{array} \right\}$

אזי V_2 פתוחה, ושוב, נבחר $q^2 = (q_1^2, q_2^2) \in V_2 \cap \mathbb{Q}^2$

נשים לב: $q^2 \neq q^1$, כי $q^1 \notin V_2$.

וקיים $\varepsilon_2 > 0$ כך ש: $P_2 := \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} |x_1 - q_1^2| < 2\varepsilon_2 \\ |x_2 - q_2^2| < 2\varepsilon_2 \end{array} \right\} \subseteq V_2$, כי V_2 פתוחה.

נמשיך כך: $V_3 := V_2 \setminus \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} |x_1 - q_1^2| \le \varepsilon_2 \\ |x_2 - q_2^2| \le \varepsilon_2 \end{array} \right\}$ וכן הלאה...

נשים לב שהתהליך יסתיים אחרי מס' בן מניה של איטרציות
שכן, בכל שלב אנחנו בוחרים נקודה ב $V \cap \mathbb{Q}^2$ ששונה מכל הקודמות
שבחרנו עד כה, ויש רק מס' בן מנייה של $\bar{q}$ ב $V \cap \mathbb{Q}^2$.

בסוף התהליך נוכל להציג את V כאיחוד המלבנים הפתוחים: $\{P_n\}_n$,
כלומר: V היא איחוד בן מניה של מלבנים.

ראינו בהרצאה שקב' המדידות לבג מהווה σ-אלגברה.

וכמו כן, שכן מהווה קב' מדידה.

ולכן איחוד בנ"מ של מדידות הוא קבוצה מדידה. כנדרש.