תרגיל בית 2 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות קלות יותר בדרך כלל, אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

1. בחרו כמה סעיפים וענו עבור המערכת האלגברית המופיעה בו:

   האם היא אגודה?

   האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?

   האם היא חבורה?

   האם הפעולה היא חילופית?

   (א) $(\mathbb{N},*)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a*b=a+b+2$.

   (ב) $(\mathbb{Q}\setminus\{-1\},*)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a*b=a+b+ab$.

   (ג) $(\mathbb{N},\max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

   (ד) $(\mathbb{Z}\setminus 3\mathbb{Z},\cdot)$, המספרים השלמים פרט לכפולות של 3 עם פעולת הכפל הרגילה.

   (ה) תהי X קבוצה. $(P(X),\triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A,B\in P(X)$ לפי $A\triangle B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

   (ו) הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$$

   (ז) $(A,\cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

2. תהי G חבורה, ו־$a\in G$ איבר. הוכיחו:

   (א) אם $aa=a$, אזי $a=e$.

   (ב) אם יש $b\in G$ כך ש־$ab=e$ אזי $ba=e$ ו־$b=a^{-1}$.

3. תהי S אגודה ו־$a\in S$ איבר. נגדיר את פעולת החזקה לפי $a^1=a$, ולכל $n>1$ נגדיר $a^{n+1}=a^n\cdot a$. הוכיחו כי מתקיים:

   (א) $a^na^m=a^{n+m}$ לכל $n,m\in\mathbb{N}$.

   (ב) $(a^n)^m=a^{nm}$ לכל $n,m\in\mathbb{N}$.

   (ג) נניח כי S היא חבורה עם איבר יחידה e ונרחיב את ההגדרה לכל חזקה שלמה לפי $a^0=e$ ו־$a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n$. הוכיחו כי $(a_1\dots a_k)^{-1}=a_k^{-1}\dots a_1^{-1}$ לכל $a_1,\dots,a_k\in S$. הסיקו כי $(a^n)^{-1}=\left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{Z}$.

שאלות רגילות

1. תהינה $(G,*)$ ו־$(H,\bullet)$ חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G\times H$ פעולה "רכיב־רכיב":

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\bullet h_2)$$

לכל $g_1,g_2\in G,h_1,h_2\in H$.

(א) הוכיחו כי $G\times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו־H.

(ב) הוכיחו או הפריכו: החבורה $G\times H$ אבלית אם ורק אם G ו־H אבליות.

(ג) תהינה G',H' תת־חבורות של G,H בהתאמה. הוכיחו או הפריכו: $G'\times H'$ היא תת־חבורה של $G\times H$.

2. מצאו את לוח כפל של חבורה עם שישה איברים המכילה איברים σ,τ,e המקיימים $\tau^2=e$, $\sigma^3=e$ ו־$\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

בתור התחלה, שימו לב שכל איבר ניתן לרשום באופן מייצג בצורה $\tau^i\sigma^j$ עבור $i=0,1$ ו־$j=0,1,2$. בעזרת הנתונים אפשר למצוא את טבלת הכפל המלאה של החבורה.

3. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a,b\in G$ מתקיים כי $(ab)^2=a^2b^2$.

4. תהי $G=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ חבורה אבלית סופית. נסמן $b=a_1a_2\cdots a_n$. הוכיחו כי $b^2=e$. אתגר: בעזרת השאלה הבאה מצאו קריטריון מתי $b=e$.

5. תהי G חבורה. נסמן $m_2=\left|\left\{x\in G: x^2=e\right\}\right|$.

(א) הראו שבכל חבורה סופית מתקיים: $m_2\equiv|G|\pmod 2$.

(ב) הראו שבכל חבורה עם מספר זוגי של איברים קיים איבר $x\neq e$ המקיים $x^2=e$.

הדרכה לסעיף א: העזרו ביחס השקילות הבא על G: $x\sim y\iff x=y\vee xy=e$. מה הגודל של כל מחלקת שקילות?

6. הוכיחו שאם באגודה S יש פתרון לכל משוואה מן הצורה $ax=b$ או $xa=b$, אז זו חבורה. (רמז: לפי ההנחה יש איבר $e\in S$ (התלוי ב־a) כך ש־$ae=a$. לכל $c\in S$ קיים x כך ש־$c=xa$, ואז $ce=xae=xa=c$, ולכן e הוא יחידה מימין. באופן דומה יש יחידה משמאל.)

בהצלחה!