מתמטיקה בדידה (88195) – פתרון מבחן לדוגמא
פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
5 השאלות הן שוות-משקל. יש לענות על כולן, כל שאלה בעמוד נפרד.
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
יש להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

1. נסחו והוכיחו את משפט ארדש-סקרש על תת-סדרות מונוטוניות.

<u>ניסוח:</u> יהיו $m,n\ge 0$ שלמים. לכל סדרה של $m\cdot n+1$ מספרים ממשיים שונים יש תת-סדרה עולה באורך $m+1$ או תת-סדרה יורדת באורך $n+1$.
<u>הוכחה:</u> (בעזרת עקרון שובך היונים) עיינו בסיכומי ההרצאות שבידיכם.

2. הוכיחו או הפריכו:

א. $A\times\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}(A\times B_i)$.

<u>הוכחה:</u>

$$(x,y)\in A\times\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in\bigcup_{i\in I}B_i\Leftrightarrow x\in A\wedge\exists i\in I(y\in B_i)$$
$$\Leftrightarrow\exists i\in I(x\in A\wedge y\in B_i)\Leftrightarrow\exists i\in I((x,y)\in A\times B_i)$$
$$\Leftrightarrow(x,y)\in\bigcup_{i\in I}(A\times B_i)$$

ב. $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i\right)$.

<u>הפרכה:</u> נגדיר

$$A_n=\begin{cases}\{1\}, & n\ \text{odd}\\ \varnothing, & n\ \text{even}\end{cases}$$

אזי

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{1\}=\{1\}\neq\varnothing=\bigcup_{n=1}^{\infty}\varnothing=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i\right)$$

(באופן כללי, אגף שמאל מכיל את כל האיברים הנמצאים באינסוף מהקבוצות A_n, ואילו אגף ימין מכיל את האיברים הנמצאים בכל הקבוצות A_n פרט למספר סופי מהן.)

3. תהיינה $\mathbb{R}$ קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbb{Q}$ קבוצת המספרים הרציונליים.
נגדיר על קבוצת הפונקציות $A=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ יחס $\sim$ ע״י:

$$f\sim g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}\,(f(x)-g(x)\in\mathbb{Q})$$

א. הוכיחו: $\sim$ הוא יחס שקילות על A.

<u>הוכחה:</u>
<u>רפלקסיבי:</u> לכל $f\in A$, $\forall x\in\mathbb{R}\,(f(x)-f(x)=0\in\mathbb{Q})$ ולכן $f\sim f$.
<u>סימטרי:</u> לכל $f,g\in A$, אם $\forall x\in\mathbb{R}\,(f(x)-g(x)\in\mathbb{Q})$ אז $\forall x\in\mathbb{R}\,(g(x)-f(x)\in\mathbb{Q})$.
<u>טרנזיטיבי:</u> לכל $f,g,h\in A$, אם $\forall x\in\mathbb{R}\,(f(x)-g(x)\in\mathbb{Q}\wedge g(x)-h(x)\in\mathbb{Q})$ אז $\forall x\in\mathbb{R}\,(f(x)-h(x)=(f(x)-g(x))+(g(x)-h(x))\in\mathbb{Q})$.

ב. הוכיחו שלכל מחלקות השקילות $[f]_\sim$ יש אותה עוצמה. מהי?

<u>הוכחה:</u> תהי $f\in A$. אזי, לכל $g\in A$, $f\sim g\Leftrightarrow f-g\in\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$. לפיכך $|[f]_\sim|=|\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}|=\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$. השוויון האחרון נובע מכך שמצד אחד $\aleph_0^{\aleph}\ge 2^{\aleph}$ ומצד שני $\aleph_0^{\aleph}\le(2^{\aleph_0})^{\aleph}=2^{\aleph_0\cdot\aleph}=2^{\aleph}$.

ג. מצאו את עוצמת קבוצת המנה $A/\sim$.

<u>פתרון:</u> כמובן, $|A/\sim|\le|A|=\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$. מצד שני, קבוצת הפונקציות $B=\left\{f\in A\,\middle|\,\forall x\in\mathbb{R}\left(f(x)\in\{0,\sqrt{2}\}\right)\right\}$ היא בעלת עוצמה $|B|=2^{\aleph}$ ואין בה זוג פונקציות שקולות: אם $f,g\in B$, $f\neq g$ אז $\exists x\in\mathbb{R}\left(|f(x)-g(x)|=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\right)$.
לכן $|A/\sim|\ge 2^{\aleph}$ ובסה״כ $|A/\sim|=2^{\aleph}$.
<u>הערה:</u> מידיעת העוצמות $|A|=2^{\aleph}$, $\forall f\in A\left(|[f]_\sim|=2^{\aleph}\right)$ אי אפשר להסיק לגבי $|A/\sim|$.

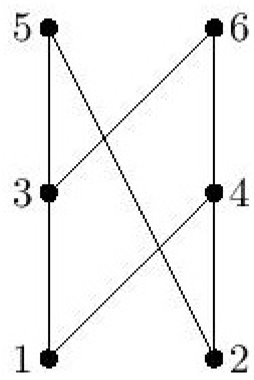
4. יהי $\lhd$ היחס על הקבוצה $P=\{1,\ldots,6\}$ המוגדר על ידי:

$$m\lhd n \quad \Leftrightarrow \quad (m=n\ \vee\ m+2\le n)$$

א. הוכיחו: $\lhd$ הוא יחס סדר חלקי על P.

<u>הוכחה:</u>
<u>רפלקסיבי:</u> לכל $m\in P$, $m=m$ ולכן $m\lhd m$.
<u>אנטי-סימטרי:</u> אם $m\lhd n$ וגם $n\lhd m$ אבל $m\neq n$, נקבל מההגדרה $(m+2\le n)\wedge(n+2\le m)$ וסתירה. לכן בהכרח $m=n$.
<u>טרנזיטיבי:</u> אם $m\lhd n$ וגם $n\lhd q$, ייתכנו ארבעה מקרים. בשנים מהם $m=n$ ולכן $m\lhd q$, ובשנים האחרים $m+2\le n$ ולכן $m+2\le q$ ושוב $m\lhd q$.

ב. ציירו את דיאגרמת הסה של $(P,\lhd)$.



ג. רשמו שתי שרשראות מקסימליות באורכים שונים ב- P.

פתרון: למשל, $1<3<5$ ו- $2<5$.

5. מצאו כמה מהמספרים השלמים בין 1 ל- 100 אינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 3, 4, 5.

פתרון: נסמן

$$A=\{i \mid 1\le i\le 100,\ 3\mid i\}$$
$$B=\{i \mid 1\le i\le 100,\ 4\mid i\}$$
$$C=\{i \mid 1\le i\le 100,\ 5\mid i\}$$

מספר המספרים השלמים בין 1 ל- n המתחלקים במספר k הוא $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$, כאשר $\lfloor x \rfloor := \max\{m\in\mathbb{Z} \mid m\le x\}$ מסמן את החלק השלם של $x\in\mathbb{R}$. לפי עקרון ההכללה וההוצאה מן הכלל, מספר המספרים השלמים בין 1 ל- 100 המתחלקים לפחות באחד מן המספרים 3, 4, 5 הוא, אם כן,

$$|A\cup B\cup C| = (|A|+|B|+|C|) - (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|) + |A\cap B\cap C| =$$
$$= \left(\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor\right) - \left(\left\lfloor \frac{100}{3\cdot 4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4\cdot 5} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 4\cdot 5} \right\rfloor =$$
$$= (33+25+20) - (8+6+5) + 1 = 78-19+1 = 60$$

ולכן המספר המבוקש הוא $100-60=40$.