לינארית 2 - מטלה 6

17 במאי 2017

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

- מספר תרגיל
- שם מלא
- ת.ז
- מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.

ענו על השאלות הבאות:

1. תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ה"ל. נתונה המטריצה המייצגת של T

$$[T]_B^S=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

עבור הבסיסים $S=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ של התחום ו $B=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ של הטווח.
מצאו את המטריצות $[T]_B^B$, $[T^2]_B^B$ וכתבו מפורשות את T^2, כלומר לאן T^2 שולחת וקטור כללי $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ [תזכורת סימונים: T^2 היא ה"ל המוגדרת $T\circ T$].

2. תהא $T:V\to W$ ה"ל חח"ע. הוכיחו כי $\dim V\le\dim W$

3. תהא $T:\mathbb{C}_2[x]\to\mathbb{C}_2[x]$ המוגדרת ע"י $p(x)\mapsto p(0)+p(1)x+p(-1)\cdot x^2$ כאשר $p(0)/p(1)/p(2)$ זה הצבה $0/1/2$ בפולוניום $p(x)$. הוכיחו כי T לכסינה ומצאו בסיס B כך ש $[T]_B^B$ אלכסונית.

4.

(א) תהא $T:V\to V$ ה"ל. יהיו $\{v_1,\dots,v_r\}$ קבוצת ו"ע של T. הוכיחו כי $W=span\{v_1,\dots,v_r\}$ הוא מרחב T- אינוואריאנטי.

(ב) [בונוס] תהא $T:V\to V$ ה"ל לכסינה. יהא W ת"מ $-T$אינוואראנטי. הוכיחו כי קיימת S קבוצה של ו"ע כך ש $W=span(S)$ [הדרכה: השתמשו בתרגיל שהוכחנו בתירגול שאם $\sum_{i=1}^{r} v_i \in W$ (עבור v_i ו"ע שמאימים לע"ע שונים ו W ת"מ T־ אינוואראנטי) אזי לכל i מתקיים $v_i \in W$].

(ג) מסקנה מסעיפים קודמים: עבור $T:V\to V$ לכסינה מתקיים כי הת"מ T־ אינוואראנטים היחידים הם אלו שנפרשים ע"י קבוצה של ו"ע.

5. תהא $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ העתקת הנגזרת (כלומר $p(x)\mapsto p'(x)$). מצאו את כל ת"מ ה D־ אינוואראינטים. [מותר להשתמש בעובדה כי אם $\{p_i(x)\}_{i=1}^{m}$ פולינומים מדרגות שונות (שונים מאפס) אזי הם בת"ל].

6.

(א) יהא $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ מ"ו, לכל $1\le i\le k$ נגדיר את ההטלה על W_i להיות ה"ל $T_i:V\to V$ המוגדרת $T_i(w_1+\cdots+w_k)=w_i$. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{k} T_i = I$.

(ב) נגדיר

$$W_1 = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$W_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ת"מ של $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$. נשים לב כי $V=W_1\oplus W_2$ ולכן נוכל להגדיר T_i להיות ההטלה על W_i (לכל $1\le i\le 2$). מצאו את T_1,T_2 מפורשות (כלומר לאן T_i שולחת מטריצה כללית $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

בהצלחה! ☺