לינארית 2 מדמ"ח

מטלה 6

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים: מספר תרגיל, שם מלא, ת.ז וזיהוי כלשהוא לקבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים (מספר הקבוצה או היום+שעה).
ענו על השאלות הבאות:

1. תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ה"ל. נתונה המטריצה המייצגת של T

$$[T]_B^S=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

עבור הבסיסים $S=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ של התחום ו $B=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ של הטווח.
מצאו את המטריצות $[T]_B^B$, $[T^2]_B^B$ וכתבו מפורשות את T^2, כלומר לאן T^2 שולחת וקטור כללי $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ [תזכורת סימונים: T^2 היא ה"ל המוגדרת $T\circ T$].

2. תהא $T:V\to W$ ה"ל חח"ע. הוכיחו כי $\dim V\le\dim W$

3. תהא $T:\mathbb{C}_2[x]\to\mathbb{C}_2[x]$ המוגדרת ע"י $p(x)\mapsto p(0)+p(1)x+p(-1)\cdot x^2$ כאשר $p(0)/p(1)/p(2)$ זה הצבה $0/1/2$ בפולוניום $p(x)$. הוכיחו כי T לכסינה ומצאו בסיס B כך ש $[T]_B^B$ אלכסונית.

4.

(א) תהא $T:V\to V$ ה"ל. יהיו $\{v_1,\ldots,v_r\}$ קבוצת ו"ע של T. הוכיחו כי $W=span\{v_1,\ldots,v_r\}$ הוא מרחב T-אינוואריאנטי.

(ב) [בונוס] תהא $T:V\to V$ ה"ל לכסינה. יהא W ת"מ $T-$אינוואראנטי. הוכיחו כי קיימת S קבוצה של ו"ע כך ש $W=span(S)$ [הדרכה: השתמשו בתרגיל שהוכחנו בתירגול שאם $\sum_{i=1}^r v_i\in W$ (עבור v_i ו"ע שמאימים לע"ע שונים ו W ת"מ T- אינווארנטי) אזי לכל i מתקיים $v_i\in W$].

(ג) מסקנה מסעיפים קודמים: עבור $T:V\to V$ לכסינה מתקיים כי הת"מ T- אינווראנטים היחידים הם אלו שנפרשים ע"י קבוצה של ו"ע.

5. תהא $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ העתקת הנגזרת (כלומר $p(x)\mapsto p'(x)$). מצאו את כל ת"מ ה D־ אינווראינטים. [מותר להשתמש בעובדה כי אם $\{p_i(x)\}_{i=1}^m$ פולינומים מדרגות שונות (שונים מאפס) אזי הם בת"ל].

6.

(א) יהא $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ מ"ו, לכל $1\le i\le k$ נגדיר את ההטלה על W_i להיות ה"ל $T_i:V\to V$ המוגדרת $T_i(w_1+\cdots+w_k)=w_i$. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^k T_i=I$.

(ב) נגדיר

$$W_1=span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

ת"מ של $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$. נשים לב כי $V=W_1\oplus W_2$ ולכן נוכל להגדיר T_i להיות ההטלה על W_i (לכל $1\le i\le 2$). מצאו את T_1,T_2 מפורשות (כלומר לאן T_i שולחת מטריצה כללית $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

בהצלחה! ☺