

תרגיל 7

1. נגדיר את המטריצות הממשיות הבאות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) מה הפולינום האופייני ומה הפולינום המינמאלי של A ושל B ?

(ב) לכל אחת מהמטריצות - מצאו ע"ע. לכל ע"ע מצאו את המרחב העצמי שלו, את הר"א ואת הר"ג. הסיקו האם המטריצה לכסינה.

(ג) האם A, B דומות?

2. מצא פולינום מינימאלי למטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \quad (\text{א})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{3 \times 3} \quad (\text{ב})$$

3. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה לכסינה. יהא $f_A(x)$ הפ"א שלה. הוכח כי $f_A(A) = 0$ ללא שימוש במשפט קיילי המילטון

4. תהא $A \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $\text{rank}(A - 3I) = 5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששוה ל - 5. הוכח כי A לכסינה מעל \mathbb{R} ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.

5. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נגדיר את הת"מ $W = \text{span} \{I, A, A^2, A^3, A^4, \dots\} \leq \mathbb{F}^{n \times n}$

(א) הוכח כי $\dim W \leq n$ (רמז: קילי המילטון)

(ב) תן דוגמא ל W המקיים $\dim W = n$ ותן דוגמא ל W המקיים $\dim W = 1$

בהצלחה!