תרגול 8 – אנליזה מודרנית

<u>תרגיל ממבחן (תשע"א):</u>

ג. תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג, ותהי I_E האינדיקטור של E. הוכיחו שלכמעט כל $a\in E$ (ביחס למידת לבג) $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h}I_E\left(x\right)dm=1$

<u>פתרון סעיף ג:</u>

נסתכל על הפונקציה $F_n\left(x\right)=\int_n^x 1_E\,dm$ המוגדרת לכל $x\in[n,n+1]$. ע"פ הכללת לבג למשפט היסודי חלק א', F_n גזירה כב"מ ו $F_n'\left(x\right)=I_E\left(x\right)$ כב"מ בקטע $[n,n+1]$. נסמן את הקבוצה ב $[n,n+1]\cap E$ שבה $F_n'\left(x\right)\neq I_E\left(x\right)$ ב D_n וברור כי $m\left(D_n\right)=0$. כעת, עבור כמעט כל $a\in[n,n+1]\cap E$ מתקיים

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2}\left(\frac{F_n\left(a+h\right)-F_n\left(a\right)}{h}+\frac{F_n\left(a\right)-F_n\left(a-h\right)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\left(F_n\left(a+h\right)-F_n\left(a-h\right)\right)=\lim_{h\to0^+}\left(\frac{1}{2h}\int_n^{a+h}1_E\,dm-\frac{1}{2h}\int_n^{a-h}1_E\,dm\right)\\
&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h}1_E\,dm=F_n'\left(a\right)
\end{aligned}$$

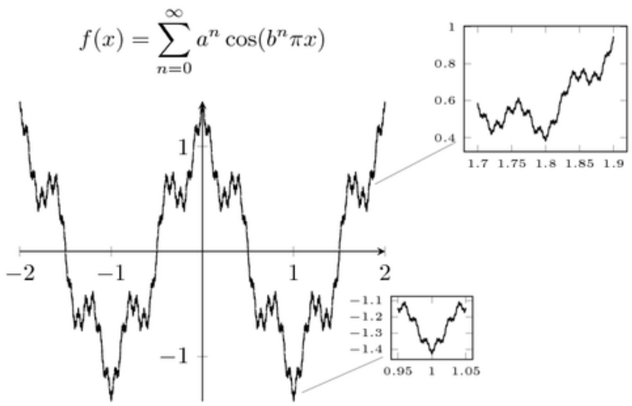
ולכן, עבור כמעט כל a מתקיים $F'\left(a\right)=1$. הקבוצה של ה a -ים ב E שעבורה $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h}I_E\left(x\right)dm\neq1$ לא מתקיים, מוכלת ב $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}D_n$ וכמובן ש $m\left(\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}D_n\right)=0$ ולכן מתקיים כמעט עבור כל $a\in E$ $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{1}{2h}\int_{a-h}^{a+h}I_E\left(x\right)dm=1$.

<u>תרגיל:</u>

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. האם בהכרח קיים קטע בו f מונוטונית?

<u>פתרון:</u> התשובה שלילית. באינפי' בונים פונקציות רציפות שאינן גזירות בשום נקודה (למשל פונקציית ויירשטראס).

ניקח את f להיות כזו, לצורך דוגמא נגדית. אילו היה קטע $I\subseteq\mathbb{R}$ שבו f מונו', משפט הגזירה של לבג היה אומר כי f גזירה כב"מ בקטע – אך זה לא ייתכן!



הגדרה: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, אזי אם $P|[a,b]$ הינה חלוקה של הקטע $[a,b]$ ע"י הנקודות $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ מגדירים את ההשתנות של f ביחס ל-P ע"י $v(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$, ואת ההשתנות הטוטאלית של f בקטע [a,b] ע"י $T_a^b[f]=\sup\{v(f,P):P|[a,b]\}$.

הגדרה: אם $T_a^b[f]<\infty$ אומרים ש-f בעלת השתנות חסומה בקטע. מרחב כל הפונקציות בעלות השתנות חסומה הוא $BV([a,b])=\{f:T_a^b[f]<\infty\}$.

תרגיל: מהי ההשתנות של הפונקציה $f(x)=x$ ביחס לחלוקה $P_n|[0,1]-0=x_0,...,x_i=2^{-n}i,...,x_{2^n}=1$? מה ההשתנות הטוטאלית של הפונקציה?

פתרון: עפ"י הגדרה מתקיים

$$v(f,P_n)=\sum_{i=1}^{2^n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|$$
$$=\sum_{i=1}^{2^n}\left|2^{-n}i-2^{-n}(i-1)\right|=\sum_{i=1}^{2^n}2^{-n}=1$$

על מנת למצוא את ההשתנות הטוטלית נסתכל על איזושהי חלוקה $P|[0,1]-0=x_0<x_1<...<x_n=1$ ונבדוק מה ההשתנות של $f(x)$ ביחס לחלוקה זאת. עפ"י הגדרה:

$$v(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_{i-1}\right|=\sum_{i=1}^{n}x_i-x_{i-1}=x_n-x_0=1$$

מכיוון שההשתנות אינה תלויה בחלוקה נקבל כי

$$T_0^1[f]=\sup\{v(f,P):P\,|\,[a,b]\}$$
$$=\sup\{1:P\,|\,[a,b]\}=1$$

הערה: ניתן לראות כי כל פונקציה מונוטונית(עולה או יורדת) בקטע $[a,b]$ הינה בעלת השתנות חסומה $T_a^b[f]=|f(b)-f(a)|$.

תרגיל: הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא בעלת השתנות חסומה בקטע $[a,b]$ אמ"מ קיימות שתי פונקציות מונוטוניות בקטע $[a,b]$ f_1,f_2 כך ש $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

פתרון:

$\Rightarrow$: נניח תחילה כי קיימות שתי פונקציות מונוטוניות f_1,f_2 כך ש $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$. עפ"י הגדרה נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|f_1(x_i)-f_2(x_i)-\left(f_1(x_{i-1})-f_2(x_{i-1})\right)\right|$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|f_1(x_i)-f_1(x_{i-1})\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|f_2(x_i)-f_2(x_{i-1})\right|=\left|f_1(b)-f_1(a)\right|$$
$$+\left|f_2(b)-f_2(a)\right|<\infty$$

$\Leftarrow$: נניח כעת כי ל $f(x)$ יש השתנות חסומה. נגדיר פונקציה חדשה $S(x)=T_a^x[f]$, פונקציה זו מונוטונית עולה בקטע $[a,b]$. כמו כן, נשים לב כי $f_1(x)=\frac{S(x)+f(x)}{2}$ הינה פונקציה מונוטונית: אם $x_1\le x_2$ אזי מאדטיביות השתנות ($T_a^b[f]+T_b^c[f]=T_a^c[f]$)

$$\frac{S(x_2)+f(x_2)}{2}-\frac{S(x_1)+f(x_1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left[S(x_2)-S(x_1)+f(x_2)-f(x_1)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[T_{x_1}^{x_2}[f]+f(x_2)-f(x_1)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left|f(x_2)-f(x')\right|+\left|f(x')-f(x_1)\right|+f(x_2)-f(x_1)\right]\ge 0$$

באותו אופן נראה כי $f_2(x)=\frac{S(x)-f(x)}{2}$ הינה מונוטונית. כעת קל לראות כי $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

1. <u>תרגיל:</u> תהי $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית דיריכלה, $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}=I_{\mathbb{Q}}(x)$ הוכיחו שבכל קטע $[a,b]$ (קטע עם אורך חיובי!) מתקיים $T_a^b[D]=\infty$

<u>פתרון</u>: יהי N טבעי. על סמך צפיפות הרציונליים והאי-רציונליים בקטע, נוכל לבנות חלוקה $P_N: a=x_0<x_1<\ldots x_N=b$ "מתחלפת" – זאת אומרת שהנקודות הן מתחלפות בין רציונליות לאי-רציונליות לסירוגין (לפחות בלי הקצוות, שם אין לדעת). נחשב את ההשתנות: $v(D,P_N)=\sum_{k=1}^{N}\left|D(x_k)-D(x_{k-1})\right|\geq\sum_{k=2}^{N-1}\left|D(x_k)-D(x_{k-1})\right|=\sum_{k=2}^{N-1}1=N-3$. אם כך הקבוצה $\{v(D,P):P\,|\,[a,b]\}$ מכילה מספרים גדולים כרצוננו ולכן $\sup\{v(D,P):P\,|\,[a,b]\}=\infty$.

2. <u>תרגיל:</u> הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$
.

פתרון: צריכים לתפוס את התנודות של הפונקציה. $\sin\frac{1}{x}$ מחזירה 1+ בנקודות $x_k=\frac{2}{\pi+4\pi k}$ ומחזירה 1– בנקודות $x_k=\frac{2}{3\pi+4\pi k}$. לכל N נגדיר שוב חלוקה "מתחלפת"

$$P_N:\frac{2}{\pi}>\frac{2}{3\pi}>\ldots>\frac{2}{\pi+4\pi k}>\frac{2}{3\pi+4\pi k}>\ldots>\frac{2}{\pi+4\pi N}>\frac{2}{3\pi+4\pi N}$$

מקבלים

$$v(f,P_N)\geq$$
$$\left|\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\right|+$$
$$\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi N\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi N}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi N\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{2}{\pi}+\frac{2}{3\pi}\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right|+\ldots+\left|\frac{2}{\pi+4\pi N}+\frac{2}{3\pi+4\pi N}\right|=$$
$$=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{(4k+1)(4k+3)}$$

וכאשר $N\to\infty$ מקבלים טור מתבדר. מכאן ה-sup הוא אינסוף.

רציפות בהחלט:

הגדרה: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת רציפה בהחלט אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$.

<u>תרגיל:</u> תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות בהחלט ו- c קבוע. הוכיחו:

א. cf רציפה בהחלט.

ב. $f+g$ רציפה בהחלט.

ג. fg רציפה בהחלט.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $\varepsilon>0$ ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f , עם $\varepsilon\mapsto\frac{\varepsilon}{|c|}$ נקבל כי קיים $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{|c|}$.

עבור אותו δ , בהינתן קטעים $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ עם סכום אורכים קטן מ- δ , נקבל כי

$$\sum_{k=1}^n |cf(b_k)-cf(a_k)|=\sum_{k=1}^n |c||f(b_k)-f(a_k)|=|c|\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|=<|c|\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon$$

ב. ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f , ישנו $\delta_1>0$, כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ_1 אזי $\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$. ע"פ הרציפות בהחלט של g ישנו $\delta_2>0$, כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ_2 אזי $\sum_{k=1}^n |g(b_k)-g(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ אם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי,

$$\sum_{k=1}^n |(f+g)(b_k)-(f+g)(a_k)|\le\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|+\sum_{k=1}^n |g(b_k)-g(a_k)|<\varepsilon$$

ג. f,g רציפות בקטע סגור, ולכן חסומות (כלומר $|f(x)|,|g(x)|\le M$ לאיזשהו M)

ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט (לשתי הפונקציות) ישנו $\delta > 0$ כך שאם $\left\{\left[a_k, b_k\right]\right\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(b_k\right)-f\left(a_k\right)\right|, \sum_{k=1}^{n}\left|g\left(b_k\right)-g\left(a_k\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$. עבור אותו δ נקבל:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|(fg)\left(b_k\right)-(fg)\left(a_k\right)\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(b_k\right)g\left(b_k\right)-f\left(a_k\right)g\left(a_k\right)-f\left(b_k\right)g\left(a_k\right)+f\left(b_k\right)g\left(a_k\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(b_k\right)\left(g\left(b_k\right)-g\left(a_k\right)\right)\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|g\left(a_k\right)\left(f\left(b_k\right)-f\left(a_k\right)\right)\right| < 2M\,\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$