הרצאה 7

תזכורת - יהי V מ״ו

קבוצה פורשת: $Span(S)=V$

(כל וקטור ב-V ניתן להציג כצ״ל של איברי S)

$$Span(S_1 \cup S_2) = Span(S_1) + Span(S_2)$$

קבוצה בת״ל: לא קיים צ״ל לא טריוויאלי שמתאפס:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

טריוויאלי $(\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0)$

$$\boxed{\text{בסיס = פורשת + בת״ל}}$$

משפט ההצגה היחידה - לכל $v \in V$ יש הצגה יחידה כצ״ל של וקטורי הבסיס.

ראינו שלכל מ״ו יש בסיס.

$\Leftarrow$ מה הקשר בין הבסיסים השונים של אותו מרחב?

חו״ג

וראינו טענה המאפשרת לשלוף בסיס מתוך קבוצה פורשת ב-$\mathbb{F}^n$.

טענה: $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{F}^n \Leftarrow$

הווקטורים המתאימים למשתנים התלויים (לאחר דירוג) מהווים בסיס ל- $\mathrm{Span}_F\{v_1,\dots,v_m\}$ $\leftarrow$ $\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\\0&0\end{matrix}}&\begin{matrix}-1\\2\\0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

<u>הוכחה:</u> נניח כי $v_{i_1},\dots,v_{i_k}$ הם הווקטורים המתאימים למשתנים התלויים לאחר דירוג:

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ v_{i_1} & \cdots & v_{i_k} \\ | & & | \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & - & - & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & - & - & 0 \end{bmatrix}$$

<u>בת"ל:</u> אילו $\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$ תל' אז יש פתרון לא טריוויאלי למע' ההומ':

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ v_{i_1} & \cdots & v_{i_k} \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_k\end{bmatrix} = \vec{0}$$

אבל דירוג שומר על מרחב הפתרונות ולכן:

$$\begin{bmatrix}0\\ \vdots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \uparrow \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

נחשב

קיבלנו $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$, כלומר הפתרון טריוויאלי.

מסקנה: $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ אוסף בת"ל.

<u>מדוע פורשת?</u> לכל הצבה של כל המשתנים החופשיים יש פתרון יחיד למשתנים התלויים (המשך ההוכחה).

בפרט, <u>יהי x_j משתנה חופשי</u>. נציב:

$$x_j = -1 \quad , \quad \underbrace{x_l = 0}_{\text{לכל משתנה חופשי אחר}}$$

ישנו פתרון:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \underbrace{\alpha_{i_1} v_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} v_{i_k}}_{\text{כל המשתנים התלויים}} + (-1) \cdot v_j$$

$$\Rightarrow v_j = \alpha_{i_1} v_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} v_{i_k}$$

לכן כל v_j המתאים למשתנה חופשי שייך ל- $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$

ולכן:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{v_1, \dots, v_m\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$$

כלומר פורשת, בת"ל.

מ.ש.ל.

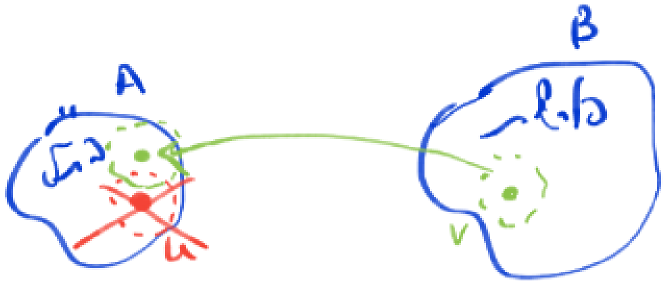
מה הקשר בין בסיסים שונים לאותו מרחב וקטורי?

הלמה של שטייניץ. (למת ההחלפה) (Lemma =משפט-עזר)

יהי V מ"ו ונניח:

- $A \subseteq V$ בת"ל
- $B \subseteq V$ פורשת (סופית)

אזי לכל $u \in A$ יש $v \in B \setminus (A \setminus \{u\})$ כך ש- $(A \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ בת"ל.



כלומר:
[ניתן להחליף כל וקטור בקב' בת"ל עם וקטור (חדש) מקב' פורשת נתונה ולצאת מבלי לפגוע בבת"ל! (כלומר A נשארת בת"ל.)]

דוגמא ב-$\mathbb{F}^3$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} , \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בת"ל   פורשת

$u = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

$A' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בת״ל | $A' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ת״ל

<u>הוכחת הלמה:</u>

נניח:

$A = \{w_1, \dots, w_m, u\}$ בת״ל

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ פורשת

מעוניינים להחליף את u בוקטור חדש מ-B כך שעדיין A תהיה בת״ל.

$(= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)$

<u>נניח בשלילה</u> שלא ניתן להחליף בוקטור חדש:

$\underline{\underline{\text{לכל}}}$ $v \in B \setminus (A \setminus \{u\})$ מתקיים ש-

$\underline{(A \setminus \{u\}) \cup \{v\}}$ ת״ל.

תזכורת: יש צ״ל לא טריוויאלי המתאפס.

אבל $A \setminus \{u\}$ היא בת״ל (כי מוכלת ב-A) ולכן המקדם של v באותו צ״ל בהכרח $\neq 0$, ואם נעביר אגפים:

$$v \in \operatorname{Span}_F (A \setminus \{u\})$$

אבל זה נכון (לפי ההנחה בשלילה) $\underline{\underline{\text{לכל}}}$ $v_1, \dots, v_n \in B$:

m

$$\boxed{\exists \alpha_{ij} \in \mathbb{F} : \quad v_i = \sum_{j=1} \alpha_{ij} w_j \qquad 1 \le i \le n} \quad (1)$$

$$(A \setminus \{u\} = \{w_1, \dots, w_m\})$$

נזכר כי B פורשת:

ידוע כי B פורשת $\Leftarrow$ $\boxed{\exists \beta_i : u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i} \quad (2)$

נקבל:

$$\underline{u} \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_i \alpha_{ij} \underline{w_j}$$

אם נעביר אגפים נקבל:

$$u - \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij} \right) w_j = 0$$

קיבלנו צירוף לינארי לא טריוויאלי של וקטורי A המתאפס, בסתירה לכך ש-A בת"ל.

לכן, ההנחה בשלילה הייתה לא נכונה: ולכן קיים $v \in B \setminus (A \setminus \{u\})$ כך ש- $(A \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ בת"ל, כנדרש.

מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> אם B_1, B_2 שניהם בסיסים של מ"ו V אז:

$$|B_1| = |B_2|.$$

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה:

$$\begin{cases} B_1 = \{v_1, \dots, v_n\} \\ B_2 = \{w_1, \dots, w_{n+k}\} \end{cases} \qquad (k \geq 1)$$

B_2 בסיס $\Rightarrow$ בת"ל
B_1 בסיס $\Rightarrow$ פורשת

מלמה שלנו נוכל להחליף כל איבר של B_2 עם איזשהו איבר של B_1, ועדיין B_2 תהיה בת"ל.

$$B_2 = \{w_1, \dots, w_{n+k}\}$$

$\downarrow$ נחליף את w_1

$$B_2' = \{v_{i_1}, w_2, \dots, w_{n+k}\} \qquad (1 \leq i_1 \leq n)$$

$\downarrow$ נחליף את w_2

$$B_2'' = \{v_{i_1}, v_{i_2}, w_3, \dots, w_{n+k}\} \qquad (1 \leq i_2 \leq n)$$

$\downarrow$

$\vdots$

נמשיך לאחר <u>n</u> צעדים:

$$B_2^{''\cdots'} = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}, w_{n+1}, \dots, w_{n+k}\}$$

כבר לא ניתן להחליף בוקטור חדש מתוך B_2 !

במילים: אם החלפנו $n+1$ וקטורים מתוך B_1, שהיא קבוצה בת n וקטורים, בוודאות אחד מהם יחזור על עצמו, סתירה לכך שכל B_2 עדיין בת"ל.

מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u>: ראינו שלכל מ"ו יש בסיס, וראינו שכל בסיסיו באותו גודל.

יהי V מ"ו. נגדיר את <u>המימד של V</u>:

$$\dim_{\mathbb{F}} V := \underbrace{\text{גודל הבסיס של } V}$$ (dimension)

<u>דוגמאות</u>:

① $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n = n$

כי ראינו את הבסיס הסטנדרטי: $\{e_1,\dots,e_n\}$.

② $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_d[x] = d+1$

כי יש לנו בסיס: $\{1,x,\dots,x^d\}$.

③ $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{n\times m} = nm$

$$\begin{array}{cc} & \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad j \end{array} =: e_{ij}$$

$\left\{ e_{ij} \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{matrix} \right\}$ בסיס.

<u>טענה</u>: יהי V מ"ו (נוצר סופית). $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(S)$.

① A בת"ל $\Leftarrow$ קיימת $A \subseteq B$, B בסיס. ("השלמה לבסיס")

② A פורשת $\Leftarrow$ קיימת $B \subseteq A$, B בסיס.

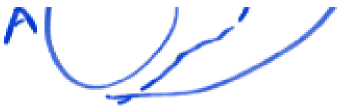
<u>הוכחה:</u>

① תהי A בת"ל ננסה להשלים אותה לבסיס.

נתבונן ב- $A \cup S$ (קב' סופית). נבחר תת-קב' של $A \cup S$ שמכילה את A, היא בת"ל ומקסימלית לגבי הכלה בין כל הקבוצות הבת"ל, נסמנה B.

ברור כי B <u>בת"ל</u>.

נוכיח כי <u>B</u> פורשת:



נניח בשלילה: $Span\, B \subsetneq Span\, S$

(v'')

לכן, $S \not\subseteq Span\, B$ (אחרת, $Span\, S = Span\, B$).

נבחר $v \in S \setminus Span\, B$ ונסתכל ב- $B \cup \{v\}$.

אז $B \subsetneq B \cup \{v\}$ אבל <u>אינו בת״ל</u>:

אם כך ת״ל אז צ.ל.ל:

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$

$$\alpha v + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = 0$$

אם $\alpha \neq 0$ ⇐ קיבלנו $v \in Span\, B$ בסתירה.

אם $\alpha = 0$ ⇐ קיבלנו צ״ל לא טריויאלי $\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = 0$ של B, סתירה לכך ש- B בת״ל.

ובכל סתירה למקסימליות של B בתור קבוצה בת״ל.

לכן B פורשת, ובת״ל, לכן בסיס.

<u>הערה</u>: הוכחנו שכל <u>בת״ל מקסימלית</u> היא פורשת (ולכן בסיס).
לפי $\subseteq$

② A פורשת, נבחר תת-קבוצה $B \subseteq A$ <u>מינימלית</u>
שאינה פורשת. נראה כי B בסיס.

ברור כי B פורשת, נותר להראות כי B בת"ל.

נניח בשלילה כי B ת"ל

$B=\{u_1,\dots,u_n\}$

קיים צ"ל לא-טריוויאלי $\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n=0$

נבחר $\alpha_i\neq 0$ ולכן נעביר אגף:

$$\alpha_iu_i=-\alpha_1u_1-\dots-\alpha_{i-1}u_{i-1}-\alpha_{i+1}u_{i+1}-\dots-\alpha_nu_n$$

$$\left[\ u_i=-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}u_1-\dots-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}u_{i-1}-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}u_{i+1}-\dots-\frac{\alpha_n}{\alpha_i}u_n\right.$$

כלומר: $u_i\in Span_F(B\setminus\{u_i\})$ ולכן,

$$V\underset{\uparrow}{=}Span\,B=Span(B\setminus\{u_i\})+Span\{u_i\}=$$

B פורשת

$$=Span(B\setminus\{u_i\})$$

כלומר: $B\setminus\{u_i\}$ קב' פורשת, בסתירה לכך שה-B מינימלית פורשת.

לכן, B פורשת ובת"ל, כלומר בסיס, כנדרש.

מסקנה: קב' פורשת מינימלית היא בת"ל ולכן בסיס.

מ.ש.ל.

מסקנות:

1. יהי V מ"ו. אם S פורש ו-T בת"ל אז:

$$|S| \geq |T|$$

הוכחה: נבחר בסיסים $B_1 \subseteq S$ (תת-קב' בסיס)
$T \subseteq B_2$ (השלמה לבסיס)

ראינו של הבסיסים אותו גודל ולכן:

$$|T| \leq |B_2| = |B_1| \leq |S|.$$ מ.ש.ל.

2. אם $W \leq V$ תמ"ו אז: $\dim_{\mathbb{F}} W \leq \dim_{\mathbb{F}} V$.

הוכחה: יהי B בסיס של W. בפרט, B בת"ל. לכן לפי הלמה ניתן להשלים את B לבסיס של V:

$$B \subseteq B'$$

בסיס של V

לכן:

$$\dim_{\mathbb{F}} W = |B| \leq |B'| = \dim_{\mathbb{F}} V.$$ מ.ש.ל.

3. אם $W \leq V$ תמ"ו ומתקיים $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} V$ אז $W = V$.

הוכחה: יהי R בסיס ל-W. בפרט R בת"ל

לכן נשלים את B לבסיס ל-V:

$$B \subseteq B'$$

בסיס של V

$$|B| = \dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} V = |B'|$$

בסיס ל-W בסיס ל-V

מסקנה - $B = B'$ ולכן $W = Span(B) = Span(B') = V$.

מ.ש.ל.

11^{00}

<u>משפט</u> ("השלישי חינם")

נניח V מ"ו, $S \subseteq V$ תת-קבוצה.

נניח $\dim_{\mathbb{F}} V = n$.

אז כל שני תנאים מקיימים את התנאי השלישי 'בחינם':

① $|S| = n$

② S <u>פורשת</u> את V

③ S <u>בת"ל</u>

ואז S בסיס.

<u>הוכחה:</u>

$\boxed{1,2 \Rightarrow 3}$: $Span(S) = V$, $|S| = n$.

לפי הלמה מקודם ניתן לבחור מ-S תת קב' פ.ש. מינימלית ⟸ בסיס, נקרא לה B:

$$B \subseteq S$$

$$|B| = \dim_{\mathbb{F}} V = n = |S|$$

$$\Downarrow$$

$B = S$, לכן S בסיס.

$\boxed{1,3 \Rightarrow 2}$: S בת"ל, $|S| = n$.

לפי הלמה מקודם, יש $S \subseteq B$, B בת"ל מקס' ולכן בסיס.

$$S \subseteq B$$

$$|S| = n = \dim_{\mathbb{F}} V = |B|$$

$$\Downarrow$$

$B = S$, לכן S בסיס.

$\boxed{2,3 \Rightarrow 1}$: S פורשת ובת"ל. לכן היא בסיס, ולפי ההגדרה: $n = \dim_{\mathbb{F}} V = |S|$.

מ.ש.ל.

~~מסקנה~~:

תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ריבועית. אזי עמודותיה בת"ל

אופק עמודותיה פורשות את $\mathbb{F}$ (אופק הפיכה).

הערה: הוכחנו את זה בעבר אין זה נובע כבר באופן מ-ד מהמשפ׳ חינם.

הסבר:

$$\{C_1(A),\dots,C_n(A)\} \quad , \quad n=\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}^n$$

ולכן מהמשפ׳ חינם קב׳ זו בת״ל $\Longleftrightarrow$ פורשת. מ.ש.ל.

הגדרה:

דרגה

$$\operatorname{rank}(A) := \dim_{\mathbb{F}} C(A)$$

$$C(A) = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{C_1(A),\dots,C_m(A)\}$$

בדומה, מרחב השורות:

$$R(A)=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{R_1(A),\dots,R_n(A)\}$$

מתברר כי

$$\operatorname{rank}(A)=\dim_{\mathbb{F}}R(A)$$

(משפט שורה (בהמשך))

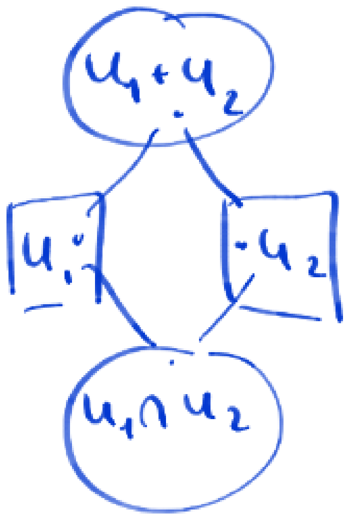
בכלל, אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אז A הפיכה אמ״מ:

$$\operatorname{rank}(A)=\dim_{\mathbb{F}}C(A)=n$$

(כי A הפיכה אמ״מ עמודותיה בסיס ל-$\mathbb{F}^n$, ולכן פורשות את $\mathbb{F}^n$, כלומר ממד מרחב העמודות $=n$.)

<u>משפט המימדים</u>: יהי V מ״ו, $U_1,U_2\le V$ תת״מ. אזי:

$$\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$$



דוגמת "צעצוע": $\mathbb{F}^3$

$$U_1 = Span_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$U_2 = Span_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>מהו ממד החיתוך?</u>

* רואים כי $U_1+U_2=\mathbb{F}^3$ (תרגיל),

$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\-1&1&0&-1\\0&2&2&1\end{pmatrix}$ מדרגים $\Rightarrow$ (3 משתנים תלויים.)

* מחליטים: $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$ (בודקים).

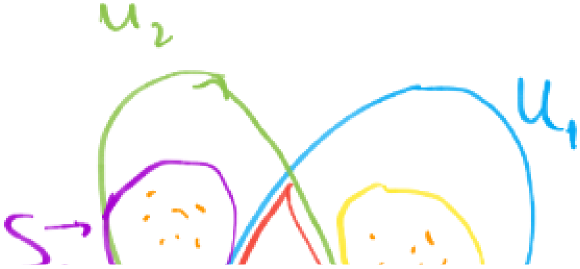
* מסיקים ממשפט הממדים:

$$\dim(U_1\cap U_2) = 2+2-3 = 1$$

<u>הערה:</u> מס' המשתנים התלויים בצורה מדורגת של $\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}$ (ב- $\mathbb{F}^n$.) שווה בדיוק $\dim_{\mathbb{F}} Span\{v_1,\dots,v_m\}$

<u>הוכחת משפט הממדים:</u>

יהי $B=\{u_1,\dots,u_k\}$ בסיס ל- $U_1\cap U_2$.



נשלים את B לבסיס ל-U_1:

$$B_1 = B \cup S_1 = \{u_1, \dots, u_n, \overbrace{v_1, \dots, v_m}^{S_1}\}$$

בדומה, נשלים את B לבסיס ל-U_2:

$$B_2 = B \cup S_2 = \{u_1, \dots, u_n, \overbrace{w_1, \dots, w_k}^{S_2}\}$$

כעת, נטען כי

$$T := B \cup S_1 \cup S_2 = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_k\}$$

הוא בסיס ל-$U_1 + U_2$.

① T פורש את $U_1 + U_2$:

$$\text{Span}(T) = \text{Span}(B \cup S_1 \cup S_2) = \text{Span}((B \cup S_1) \cup (B \cup S_2)) =$$

Span של איחוד = סכום ה-Span-ים

$$= \text{Span}(\overbrace{B \cup S_1}^{B_1}) + \text{Span}(\overbrace{B \cup S_2}^{B_2}) = U_1 + U_2.$$

B_1 בסיס ל-U_1

B_2 בסיס ל-U_2

⊛ $\underline{T \text{ בת"ל}}$: נניח בשלילה ש-$T$ ת"ל.

$$T=\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_k\}$$

ז"א צ"ל לא טריוויאלי:

$$(*)\qquad \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i}_{u}+\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\beta_i v_i}_{v}+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\gamma_i w_i}_{w}=0$$

נסמן:

אם $v=0$, נקבל צ"ל [illegible] לא-טריוו' של B_2

$\{u_1,\dots,u_n,w_1,\dots,w_k\}$

וזה לא ייתכן, כי B_2 בסיס.

לכן, $\underline{v\neq 0}$. נעביר אגף במשוואה $(*)$:

$$v=-u-w$$

כי צ"ל של $(v_1,\dots,v_m$ שייך ל-$\underline{\underline{U_1}}$

$-u\in U_1\cap U_2$

$-w\in U_2$

$\Rightarrow -u-w \underline{\underline{\in}} U_2$

לכן, $0\neq v\in U_1\cap U_2$. נגיע לסתירה כי v

צ"ל של אברי הבסיס B (שהוא בסיס ל-$U_1 \cap U_2$):

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i v_i = \right) v = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j u_j$$

$$\left(B=\{u_1,\dots,u_n\}\right)$$

קיבלנו צ"ל לא טריוויאלי של אברי הבסיס B_1:

$$B_1=\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m\}$$

$$\overbrace{\beta_1 v_1+\dots+\beta_m v_m}^{v} - \lambda_1 u_1 - \dots - \lambda_n u_n = 0$$

(זהו צ"ל לא טריוויאלי, כי $v \neq 0$ ולכן לא ייתכן שכל ה-β_i-ים הם 0.)

וזו סתירה לכך ש-B_1 בסיס.

לכן, $T=\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_k\}$ בת"ל.

סה"כ: T בסיס ל-U_1+U_2. לכן:

$$\underline{\dim(U_1+U_2)} = |T| = n+m+k =$$

$$=(n+m)+(n+k)-n=$$

$$= |B_1| + |B_2| - |B| =$$

$$= \underline{\dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)}$$

מ.ש.ל.   קורל.

<u>הערה:</u> נניח $U_1, U_2 \leq V$ והסכום שלהם ישר $U_1 \oplus U_2$.

$$\boxed{\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2} - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_{0}$$

(למעשה, זה אמ"ם.)

<u>דוגמה:</u> עבור ב- $V = \mathbb{F}^{n \times n}$.

$$\dim_{\mathbb{F}} V = n^2$$

$U_1 =$ מרחב המט' המשולשות עליונות

$U_2 =$ — " — — " — תחתונות

$U_1 \cap U_2 =$ מט' אלכסוניות

$U_1 + U_2 = \mathbb{F}^{n \times n}$

$\dim_{\mathbb{F}} U_1 =$

$n(n+1)$

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \qquad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

למעשה:

$$\{e_{ij} \mid i \le j\}$$

בסיס ל-U_1.

$$\dim_{\mathbb{F}} U_2 = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

למעשה: $\{e_{ij} \mid i \ge j\}$ בסיס ל-U_2.

$$\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1\cap U_2)$$

זה האלכסון

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n$$

בהתאם למשפט המימדים.

<u>קואורדינטות</u>

V מ״ו, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס.

יהי $v \in V$, הקואורדינטות של v ביחס ל-B:

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

וקטור הקוא׳: $(\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)$.

<u>חישוב וקטור קואורדינטות ב-$\mathbb{F}^n$</u>:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} | & & | & | \\ u_1 & \cdots & u_n & v \\ | & & | & | \end{array}\right] \xrightarrow{\text{דירוג}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \end{array}\right]$$

$A = \underbrace{u_1 \cdots u_n}_{A}$

וקטור הקואורדינטות

במילים אחרות, פתרון המע' $A\underline{x} = v$.

<u>דוגמה</u> – ב- $\mathbb{F}^2$ יהי הבסיס:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מהו וקטור הקוא' של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ביחס ל- B?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right)$$

כלומר:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1/3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-2/3) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

<u>דוגמה נוספת</u>: ב- $\mathbb{F}_2[x]$ בסיס:

$$B = \left\{ \underbrace{1+x^2}_{p_1}, \underbrace{-x-x^2}_{p_2}, \underbrace{1+x}_{p_3} \right\}$$

וקטורי הקואורדינטות של p_1, p_2, p_3 לפי הבסיס

הסטנ' $\{1,x,x^2\}$ הם:

$$p_1:\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad p_2:\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad p_3:\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

נרצה ל- $1+x+x^2$ כצ"ל של p_1,p_2,p_3.

נקבל מערכת הקואורדינטות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&-1&1&1\\1&-1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&-1&1&1\\0&-1&-1&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&-2&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&1/2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1/2\\0&1&0&-1/2\\0&0&1&1/2\end{array}\right)$$

כלומר:

$$1+x+x^2=1/2\cdot p_1(x)+(-1/2)\cdot p_2(x)+1/2\cdot p_3(x).$$

<u>הגדרה:</u> יהיו B_1,B_2 בסיסים של V.

<u>מטריצת המעבר בין הבסיסים B_1 ו-B_2:</u>

סימון:

$B_1=\{v_1,\dots,v_n\}$

$B_2=\{u_1,\dots,u_n\}$

$$[I]^{B_2}_{B_1} = \begin{bmatrix} \Big| & \Big| & \cdots & \Big| \end{bmatrix}$$

וקטור הקוא' של u_1 לפי B_1

וקט' הקוא' של u_2 לפי B_1

וקטור הקוא' של u_n לפי B_1

<u>דוגמה</u>: מהי מט' המעבר מ- B_1 ל- B_2 כאשר $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

$$[I]^{B_2}_{B_1} = \begin{bmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ \multicolumn{2}{c|}{\underbrace{\qquad\quad}_{B_1}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\quad}_{B_2}} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{נדרג}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ & & ? \\ 0 & 1 & \end{array} \right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \end{array}\right)$$

כלומר: וק' הקוא' של $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ביחס ל-B_1 הינו:

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

וק' הקוא' של $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ביחס ל-B_1 הינו:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן מט' המעבר מ-B_1 ל-B_2 הינה:

$$[I]^{B_2}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>הערה:</u> נניח B_1, B_2 בסיסים. $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$

יהי $v \in V$ וקטור. נניח כי וקטור הקוא' של v ביחס ל-B_1 הינו:

דאר

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

אזי: וקטור הקוא' של v ביחס ל-B_2 הינו:

$$[I]_{B_2}^{B_1}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}.$$

<u>הוכחה:</u> וק' הקוא' של v ביחס ל-B_1 נתון:

$$v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$$

נזכור בהגדרה את $[I]_{B_2}^{B_1}$:

$$\begin{bmatrix}\beta_{11}\\ \vdots\\ \beta_{n1}\end{bmatrix}\Leftarrow\quad v_1=\beta_{11}u_1+\dots+\beta_{n1}u_n$$
$$\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad (*)$$
$$\begin{bmatrix}\beta_{1n}\\ \vdots\\ \beta_{nn}\end{bmatrix}\leftarrow\quad v_n=\beta_{1n}u_1+\dots+\beta_{nn}u_n$$

כלומר:

$$[I]_{B_2}^{B_1}=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \dots & \beta_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn}\end{bmatrix}$$

ולכן:

$$[I]_{B_2}^{B_1}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{11}\alpha_1+\dots+\beta_{1n}\alpha_n\\ \vdots\\ \dots\end{bmatrix}\quad(\#)$$

$\beta_{n1}\alpha_1 + \dots + \beta_{nn}\alpha_n$]

ונוכיח שאלה אכן הן הקואורד' של v בבסיס B_2:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \overset{(*)}{=}$$

$$= \alpha_1(\beta_{11}u_1 + \dots + \beta_{n1}u_n) +$$

$$\vdots$$

$$+ \alpha_n(\beta_{1n}u_1 + \dots + \beta_{nn}u_n) =$$

$$= (\alpha_1\beta_{11} + \dots + \alpha_n\beta_{1n})u_1 + \dots + (\alpha_n\beta_{1n} + \dots + \alpha_n\beta_{nn})u_n$$

וקיבלנו שאכן הקואורד' של v בבסיס B_2

הלא אלו $(\#)$, כנדרש. מ.ש.ל.

<u>חישוב מט' מעבר:</u>

$$B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$$
$$B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$$
$$\Downarrow$$
$$u_1 = \alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{n1}v_n$$
$$\vdots$$
$$u_n = \alpha_{1n}v_1 + \dots + \alpha_{nn}v_n$$
$$\Downarrow$$

$$[T]^{B_2} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \end{bmatrix}$$

$$[L]_{B_1} = \begin{bmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$