1. תזכורת: פונקצית האקספוננט המרוכבת מגודרת להיות

$$e^{x+iy} = e^x(y)$$

והיא מקיימת כי

- היא רציפה
- היא גזירה ומתקיים $(e^z)' = e^z$
- (חיבור מעריכים): $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
- היא מזדהה עם פונקצית האקספוננט הממשית על ערכים ממשיים.

2. תכונות:

(א) $|e^z| = e^{Re(z)}$ (בכתיב אחר: $\left|e^{x+iy}\right| = e^x$). למשל $\left|e^{8+2i}\right| = e^8$
הוכחה: בהרצאה הקודמת.

(ב) לכל מספר מרוכב z מתקיים $e^z \neq 0$
הוכחה: מהתכונה הקודמת, כיוון ש $|e^z| = e^{Re(z)} \neq 0$ נקבל ש $e^z \neq 0$ (אפס הוא המספר היחידי שהנורמה שלו שווה לאפס).
הערה: ייתכן ש e^z יהיה שווה למספר ממשי שלילי. למשל

$$e^{8+i\pi} = e^8(\pi) = -e^8$$

(ג) ההופכי של e^z הוא e^{-z}.
הוכחה: לפי תכונת חיבור מעריכים נקבל ש

$$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$$

למשל

$$e^{8-2i}e^{-8+2i} = 1$$

כלומר $\left(e^{8-2i}\right)^{-1} = e^{-8+2i}$.

(ד) לכל n טבעי $(e^z)^n = e^{zn}$. הוכחה: ע"י חיבור מעריכים.

$$(e^z)^n = e^z e^z \cdots e^z = e^{z+z+\cdots+z} = e^{nz}$$

(ה) $e^{i\pi} + 1 = 0$ (או $e^{i\pi} = -1$)
הוכחה: חישוב ישיר

$$e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0\,(\pi) = 1 \cdot (-1) = -1$$

(ו) פונקציה האקספוננט המרוכבת היא מחזורית $2\pi i$, כלומר $e^z = e^{z+2\pi i}$ (ולכן גם $e^z = e^{z+2\pi n i}$)
למשל

$$e^{8+2i} = e^{8+2i+2\pi i} = e^{8+2i+2\pi i+2\pi i}$$

הוכחה: נסמן $z = x + yi$

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+yi+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} = e^x\,(y+2\pi) = e^x\,(y) = e^{x+yi} = e^z$$

(ז) (זהות ארגוב ושות') מתקיים ש $e^{z+\pi i} = -e^z$

$$e^{z+\pi i} = e^{x+yi+\pi i} = e^{x+(y+\pi)i} = e^x\,(y+\pi) = e^x\,[-\,(y)] = -e^x\,(y) = -e^{x+yi} = -e^z$$

(ח) פונקציה האקספוננט המרוכבת אינה חח"ע.
הוכחה: למשל

$$e^8 = e^{8+2\pi i}$$

(ט) פונקציה האקספוננט המרוכבת כמעט על (לכל מספר, פרט לאפס, יש מקור).
במדויק: לכל $w \neq 0$ מרוכב, קיים z מרוכב כך ש $e^z = w$.
נתחיל עם דוגמה: למספר $2+i = \sqrt{5}(0.463)$ יש מקור. כלומר קיים z מרוכב כך ש $e^z = 2+i$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(y) = \sqrt{5}(0.463)$$

נגדיר $z = \ln(\sqrt{5}) + 0.463i$ ואז

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(y) = e^{\ln(\sqrt{5})}(0.463) = \sqrt{5}(0.463) = 2+i$$

הוכחה: יהא $0 \neq w = r\,(\theta)$ (ולכן $r > 0$) נגדיר $z = \ln(r) + \theta i$ ואז

$$e^z = e^{\ln(r)+\theta i} = e^{\ln(r)}(\theta) = r(\theta)$$

הערה: כמובן שגם $\ln(r) + \theta i + 2\pi k i$ הוא מקור.
הערה: אם $e^{z_1} = e^{z_2}$ אזי ההפרש $z_1 - z_2$ שווה ל $2\pi k i$.