ב"א אלגברה לינארית תשפב מבחן לדוגמה

1. נתונות הנקודות $A=(-a,0)$ ו $B=(a,0)$ עבור $a>0$. המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה A גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה B זהה למקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z המקיימים $|z+b|=4$. נתון ש a,b פרמטרים ממשיים.

(א) מצאו את הערך של a ואת הערך של b.

פתרון: המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה A גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה B הוא כל ה (x,y) המקיימים

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}=2\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

ואם נעלה בריבוע (שני הצדדיים חיובים אז העלאה בריבוע היא פעולה שקולה) ונעביר אגף נקבל

$$0=4\left[(x-a)^2+y^2\right]-\left[(x+a)^2+y^2\right]$$

נפשט את צד ימין

$$\begin{aligned}4\left[(x-a)^2+y^2\right]-\left[(x+a)^2+y^2\right]&=4\left[x^2-2ax+a^2+y^2\right]-\left[x^2+2ax+a^2+y^2\right]\\&=3x^2-10ax+3a^2+3y^2\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שהמקום הגאומטרי הוא כל ה (x,y) המקיימים

$$3x^2-10ax+3a^2+3y^2=0$$

או בחילוק ב 3 נקבל

$$x^2-\frac{10}{3}ax+a^2+y^2=0$$

ונתון שמקום זה שווה לכל ה z המקיימים $|z+b|=4$ כלומר שזהו מעגל שמרכזו ב $(-b,0)$ ורדיוסו 4 לכן נעביר את המקום הגיאומטרי שמצאנו לצורה של משוואת מעגל. כיוון ש

$$x^2-\frac{10}{3}ax+a^2+y^2=\left(x-\frac{5}{3}a\right)^2+\left(a^2-\frac{25}{9}a^2\right)+y^2$$

נקבל שהמשוואה $x^2-\frac{10}{3}ax+a^2+y^2=0$ שקולה ל

$$\left(x-\frac{5}{3}a\right)^2+y^2=-\left(a^2-\frac{25}{9}a^2\right)=\frac{16}{9}a^2=\left(\frac{4}{3}a\right)^2$$

קיבלנו בסה"כ ש $\left(x-\frac{5}{3}a\right)^2+y^2=\left(\frac{4}{3}a\right)^2$ שווה למעגל שמרכזו ב $(-b,0)$ ורדיוסו 4. לכן $-b=\frac{5}{3}a$ ו $\frac{4}{3}a=4$ (זה בגלל שנתון $a>0$). לכן $a=3$ ו $b=-5$.

(ב) מלבן TNEF שצלעותיו מקבילות לצירים, חסום במקום הגאומטרי המתואר בפתיח.
שיעור ה y של הקודקודים E ו Fקטנים מ 0.
המספר המרוכב $z=2+iy$ מייצג את הקודקוד T של המלבן.
הנקודה C נמצאת על ציר x כך ש $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{CF}=-16$.
מצאו את השיעורים של הנקודה C.
פתרון: גילנו שהמקום הגיאומטרי הוא כל ה z שמקיימים $|z-5|=4$ כלומר כל ה (x,y) שמרחקם מ $(5,0)$ הוא 4.
ראשית נמצא את y (שנתון ש $T=(2,y)$) - הוא מקיים

$$(2-5)^2+y^2=16$$

או

$$y^2=7$$

ולכן $y=\pm\sqrt{7}$ אבל כיוון ש F עם אותו שיעור x כמו T אבל עם סימנים שונים בערך y, ומכיוון שערך ה y של T קטן מ 0 נקבל ש $T=\left(2,\sqrt{7}\right)$ ו $F=\left(2,-\sqrt{7}\right)$. כיון ש N עם אותו ערך y של T נקבל ש $N=\left(c,\sqrt{7}\right)$ עבור איזה שהוא c שמקיים גם הוא את משוואת המעגל ולכן

$$(c-5)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2=16$$

או

$$(c-5)^2=9$$

ולכן $c-5=\pm3$ ולכן $c=5\pm3$. מכיוון שהנקודה F עם שיעור x ששווה ל 2 נקבל ש $c=8$. ובסה"כ קיבלנו ש $N=\left(8,\sqrt{7}\right)$ ו$F=\left(2,-\sqrt{7}\right)$. כעת נסמן את C כ $(x,0)$ עבור x כלשהוא. נתון ש $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{CF}=-16$ ולכן

$$(x-8)\cdot(x-2)+\sqrt{7}\cdot\left(-\sqrt{7}\right)=-16$$

מכאן ש

$$x^2-10x+25=0$$

כלומר $(x-5)^2=0$ ולכן $x=5$ מכאן ש C היא הנקודה $(5,0)$.

2. יהיו $a,t\in\mathbb{R}$ פרמטרים ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} ax+y+z &=1\\ x+ay+z &=t\\ x+y+az &=1\end{cases}$$

(א) מצאו לכל אפשרות של ערכי הפרמטרים a,t, האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או שאין פתרון.פתרון:
נעביר את מערכת המשוואות לייצוג במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a&1&1&1\\ 1&a&1&t\\ 1&1&a&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&a&1&t\\ a&1&1&1\\ 1&1&a&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-aR_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&a&1&t\\ 0&1-a^2&1-a&1-at\\ 0&1-a&a-1&1-t\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & t \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-t \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-at \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-(a+1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & t \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-t \\ 0 & 0 & (1-a)-(a-1)(a+1) & 1-at-(a+1)(1-t) \end{array}\right)$$

וכעת:

אם $1-a \neq 0$ וגם

$$(1-a)-(a-1)(a+1) = (1-a)[1+(a+1)] = (1-a)[a+2] \neq 0$$

נקבל שיש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. נטפל במקרה ש $1-a \neq 0$ ($a=1$) או ש $(1-a)[a+2]=0$(שמוסיף את האפשרות $a=-2$):

- $a=1$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 1-t-2(1-t) \end{array}\right)$$

ואז:

  - אם $t \neq 1$ יהיה בשורה השניה שורת סתירה ולא יהיה פתרון:
  - אם $t=1$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנים חופשיים (z,y) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

- $a=-2$- נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & t \\ 0 & 3 & -3 & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 1+2t+(1-t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & t \\ 0 & 3 & -3 & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 2+t \end{array}\right)$$

ואז:

  - אם $t \neq -2$ יש בה שורת סתירה ולכן במקרה זה לא יהיה פתרון.
  - אם $t=-2$ נקבל צורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (z) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

לסיכום: עבור $a \neq 1,-2$ יש פתרון יחיד. עבור $a=1, t \neq 1$ או $a=-2, t \neq -2$ לא יהיה פתרון ועבור שאר המקרים $a=1, t=1$ או $a=-2, t=-2$ יהיו אינסוף פתרונות.

(ב) עבור כל ערכי של הפרמטרים a,t עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת.פתרון:
ראינו שעבור $a=t=1$ נקבל את המערכת (אחרי דירוג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהפתרון שלה הוא (אם נציב $z=s, y=t$)

$$\left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ועבור $a=t=-2$ נקבל את המערכת (אחרי דירוג ונמשיך לדרג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהפתרון שלה הוא (אם נציב $z=t$)

$$\left\{\begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} \mid s,t\in\mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

3. נביט במטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

(א) מצאו את A^{-1}.

פתרון: נשתמש באלגוריתם למציאת הופכית ונדרג את המטריצה $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1-R_3]{R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ עבורם $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון: נכפיל את השיוויון המבוקש בשאלה ב A^{-1} משמאל ונקבל

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ג) נסמן $B=A-I$ כאשר I מטריצת היחידה. מצאו בסיסים ומימדים ל $R(B),C(B),N(B)$.

פתרון: נחשב מפורשות את B ונדרג אותה:

$$B=A-I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$N(B) \underbrace{=}^{(\text{המשתנה החופשי})\ y=t} \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל$N(B)$ ולכן $\dim N(B) = 1$. בנוסף, השורות השונות מאפס בצורה מדורגת מהוות בסיס ל $R(B)$ ולכן

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל $R(B)$ ו $\dim R(B) = 2$. ולסיום עמודות במטריצה B שיש בהם איברים פותחים בצורה מדורגת - מהוות בסיס ל$C(B)$ ולכן (כיוון שיש איברים פותחים בעמודות 1 ו 3 בצורה מדורגת)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל $C(B)$ ו $\dim C(B) = 2$.

4. נביט בתתי המרחבים

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x + y + z + w = 0 \right\}$$

ו

$$W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(א) מצאו בסיסים ומימדים ל U ול W.

פתרון: נפתור את המערכת שמייצת את U: המטריצה המייצגת שלה המערכת היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שהיא כבר מדורגת קנונית ולכן הפתרון הוא : ולכן, נציב פרמטרים במשתנים החופשיים $y = t_1, z = t_2, w = t_3$ ואז

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -t_1 - t_2 - t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס לU ולכן $\dim U = 3$.

נעביר את W לייצוג על ידי מערכת משוואות ועל הדרך גם נמצא לו בסיס. נדרג את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & -2 & y \\ 0 & -2 & 2 & 2 & z \\ 1 & 0 & 1 & 2 & w \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & -2 & y \\ 0 & -2 & 2 & 2 & z \\ 0 & -1 & 1 & 1 & w-x \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 + \frac{1}{2}R_2]{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & -2 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-x+\frac{1}{2}y \end{array}\right)$$

ומכיוון שיש איברים פותחים בעמודה 1 ובעמודה 2 נקבל ש

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס של W ולכן $\dim W = 2$ ובנוסף,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} z+y=0 \\ w-x+\frac{1}{2}y=0 \end{array} \right\}$$

(המשוואות שמאפיינות את W הם אלו שמהוות תנאי שקול לכך שלא תהיה סתירה במטריצה לעיל שדירגנו).

(ב) מצאו בסיס ומימד ל $U \cap W$.

פתרון: בסעיף קודם ראינו ש

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} z+y=0 \\ w-x+\frac{1}{2}y=0 \end{array} \right\}$$

ולכן, בחיבור המשוואה שמאפיינת את U שנתונה בשאלה, נקבל

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} x+y+z+w=0 \\ z+y=0 \\ w-x+\frac{1}{2}y=0 \end{array} \right\}$$

נפתור את המערכת שמייצגת את $U \cap W$ בעזרת דירוג הייצוג המטריצי שלה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - \frac{3}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_1-R_3]{R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&1&0&5\\0&1&0&4\\0&0&1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&4\\0&0&1&-4\end{pmatrix}$$

ולכן, נציב פרמטר $w=t$ במשתנה החופשי ונקבל

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}-t\\-4t\\4t\\t\end{pmatrix}\mid t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-4\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\-4\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס לחיתוך והמימד הוא $\dim U\cap W=1$.