

אינפי 2 – תרגיל 10

1. בדקו תחום התכנסות / התכנסות במידה שווה של סדרות הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f_n(x) = \frac{x}{n} \cdot \ln\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in (0,1)$$

$$\text{ב. } f_n(x) = x \cdot \arctan(nx), \quad x \in (0, \infty)$$

$$\text{ג. } f_n(x) = \begin{cases} 1, & [n, n+1] \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

2. הפונקציה f מוגדרת בקטע $[a, b]$ ונגדיר : $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$ סימון לפונקציית הערך השלם). להוכיח שסידרת הפונקציות האלו מתכנסות במידה שווה ל- f בקטע.

3. תהי f פונקציה רציפה ב- \mathbb{R} ונגדיר : $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$. יש להוכיח כי הסידרה מתכנסת במידה שווה בכל קטע סופי על הישר.

4. בידקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, מוגדרים בקבוצות המצויינות :

$$\text{א. } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right), \quad (-a, a)$$

$$\text{ב. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}, \quad [0, \infty)$$

$$\text{ג. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad [0, \infty)$$

$$\text{ד. } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{4^n x}, \quad \text{על הישר.}$$

5. הוכיחו/הפריכו : אם קיימת התכנסות במידה שווה : $f_n \xrightarrow{\text{במידה שווה}} f$ בקטע החצי – פתוח $[a, b]$ וגם קיימת התכנסות נקודתית $f_n(b) \rightarrow f(b)$ אז, ההתכנסות היא במידה שווה בקטע הסגור $[a, b]$.