פיתרון לתרגיל 4

תשובה 1:

נסמן ב- G=True **הדשא רטוב .** G=False **הגשם אינו רטוב. (לשם קיצור נסמן** T **ו-** F **בהתאמה)**

נסמן ב- S=T **הממטרה פועלת .** S=F **הממטרה לא פועלת. באופן דומה** R=T **יורד גשם.** R=F **לא יורד גשם אזי לפי נוסחאת בייס נקבל:**

נסמן $P(A,B) = P(A \cap B)$ **ובאופן דומה** $P(A,B,C) = P(A \cap B \cap C)$.

במעבר השני משתמשים במונה ובמכנה בעיקרון :

$$P(A) = P(A \cap (B \cup B^C)) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

לדוגמא במונה:

$$P(G = T, R = T) = P(G = T, (S = T) \cup (S = F), R = T) =$$

$$= P(G = T, S = T, R = T) + P(G = T, S = F, R = T)$$

בקטן מסומן עבור כל מספר מאיזו אפשרות הגיע: TTF מסמן G=T,S=T,R=F .

$$\mathrm{P}(R = T \mid G = T) = \frac{\mathrm{P}(G = T, R = T)}{\mathrm{P}(G = T)} = \frac{\sum_{S \in \{T,F\}} \mathrm{P}(G = T, S, R = T)}{\sum_{S,R \in \{T,F\}} \mathrm{P}(G = T, S, R)}$$

$$\frac{0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.8_{TTT} + 0.8 \cdot 0.99 \cdot 0.8_{TFT}}{0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.8_{TTT} + 0.9 \cdot 0.4 \cdot 0.2_{TTF} + 0.8 \cdot 0.99 \cdot 0.8_{TFT} + 0 \cdot 0.6 \cdot 0.2_{TFF}} =$$

$$= \frac{1.4435}{1.5155} = 0.952$$

המעבר מהשורה הראשונה לשניה (הצבת הערכים המספריים) מתבסס על הזהות הבאה הנגזרת מכלל בייס $P(X|Y)P(Y) = P(X,Y)$:

$$\mathrm{P}(X, Y, Z) = \mathrm{P}(X|Y, Z)\mathrm{P}(Y, Z) = \mathrm{P}(X|Y, Z)\mathrm{P}(Y|Z)\mathrm{P}(Z)$$

תשובה 2: (שאלה מהכיתה)

נסמן ב- Y את המשתנה המקרי המציין הצלחה בהוצאת אדום וכישלון אחרת.

מספר הראשים המתקבלים X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n,p, דהיינו $X\sim Bin(n,p)$. בהינתן $X=k$ ו k שלם לא שלילי) הסיכוי להוציא כדור אדום הוא $1/(k+1)$ שכן הוכנסו לכד k כדורים לבנים ואדום יחיד. דהיינו $Y|X=k$ הוא משתנה ברנולי עם פרמטר $1/(k+1)$. בקיצור $Y|X\sim Ber\left(\frac{1}{1+X}\right)$. עתה לפי נוסחת ההסתברות השלמה :

$$P(Y=1)=$$

נציב $t=k+1$ ונקבל :

נוסיף ונחסר את הנסכם המתאים ל- $t=0$ על מנת לקבל טור של התפלגות בינומית:

$$\frac{1}{p(n+}$$

מכאן ההמשך פשוט. ראו במחברת.

<u>תשובה 3:</u>

א. $X_i \sim Bin(n, \frac{D_i}{N})$.

ב.

$$P(X_1 = x_1 , X_2 = x_2) =$$

$$\binom{n}{x_1}\binom{n-x_1}{x_2}\left(\frac{D_1}{N}\right)^{x_1}\left(\frac{D_2}{N}\right)^{x_2}\left(1-\frac{D_1+D_2}{N}\right)^{n-x_1-x_2}$$

ג. **מאחר ומדובר בהוצאה עם החזרה המאורעות הם בלתי תלויים. מאחר שיתכן ששני המאורעות יתרחשו יחדיו, הם אינם זרים.**

ד. $X_i + X_j \sim Bin(n, \frac{D_i + D_j}{N})$.

$$P(X_i = x_i$$

$$= \frac{\binom{n}{x_i}\binom{n-x_i}{m-x_i}\left(\frac{D_i}{N}\right)^{x_i}\left(\frac{D_j}{N}\right)^{m-x_i}\left(1-\frac{D_i+D_j}{N}\right)^{n-m}}{\binom{n}{m}\left(\frac{D_i+D_j}{N}\right)^{m}\left(1-\frac{D_i+D_j}{N}\right)^{n-m}} =$$

$$\binom{m}{x_i}\left(\frac{D_i}{D_i+D_j}\right)^{x_i}\left(1-\frac{D_i}{D_i+D_j}\right)^{m-x_i}$$

לכן

$$X_i \mid X_i + X_j = m \sim Bin\left(m, \frac{D_i}{D_i + D_j}\right)$$

תשובה 4:

נסמן X – מספר הגרביים שהוצאו.

ההסתברות ש $X = 2$ היא ההסתברות ששתי הגרביים הראשונות מהוות זוג: $P(X=2)=\frac{2n}{2n}\cdot\frac{1}{2n-1}$

ההסתברות ש $X = 3$ היא ההסתברות ששתי הגרביים הראשונות אינן זוג, אבל השלישית היא בת-זוג של אחת משתי הראשונות: $P(X=2)=\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2}{2n-2}$

$$P(X=3)=\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-2}\cdot\frac{3}{2n-3}$$

ובאופן דומה :

$$P(X=k)=\frac{2n(2n-2)(2n-4)...(2n-2(k-1))(k-1)}{\frac{(2n)!}{(2n-k)!}}$$

דרך אלטרנטיבית:

נבחר מרחב מדגם שבו מתבוננים בהוצאת k-1 הגרביים הראשונות, ואח"כ את הגרב ה – k.

$$\binom{2n}{k-1}(2n-(k-1))$$

בשביל שבפעם ה – k נשלים זוג, צריך ש k-1 הגרביים הראשונות יגיעו כל-אחת מזוג אחר. נבחר את הזוגות: $\binom{n}{k-1}$ ואחר כך מכל זוג נבחר נציג: $2^{(k-1)}$ אפשרויות. בשלב האחרון נבחר בת-זוג לאחת מ – k-1 הגרביים שהוצאנו – (k-1) אפשרויות.

$$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k-1}2^{(k-1)}(k-1)}{\binom{2n}{k-1}(2n-(k-1))}$$

תשובה 5:

פתרון. השאלה אמנם אינה דורשת זאת במפורש, אבל תמיד נוח להצטייד בכמה משתנים מקריים מוגדרים כראוי. נסמן ב־X את מספר הזריקות של חנן עד לקליעה הראשונה, וב־Y את מספר הזריקות של יואב עד לקליעה הראשונה. מכיוון שמדובר בסדרת נסיונות בלתי תלויים, $X \sim G(\alpha)$ ו־$Y \sim G(\beta)$,

בסעיף (א) שואלים מה ההסתברות לכך ששתי הנקודות הראשונות תושגה ברצף. כלומר, לאחר סדרת כשלונות (של שני השחקנים, לסירוגין), אחד מהם קולע, ואחריו קולע מיד השחקן השני. מכיוון שחנן הוא הקולע ראשון, המאורע המבוקש הוא $\{X=Y\}\cup\{X=Y+1\}$ ($X=Y$ פירושו שחנן קלע ראשון ומיד אחריו יואב, ו־$X=Y+1$ פירושו שיואב קלע ראשון ומיד אחריו חנן). המאורעות $X=Y$ ו־$X=Y+1$ זרים (לא יתכן ש־$X=Y=Y+1$), ולכן ההסתברות היא

$$P(X=Y)+P(X=Y+1).$$

$$\begin{aligned}
P(X=Y+a) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=Y+a|Y=n)P(Y=n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n+a|Y=n)P(Y=n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n+a)P(Y=n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^{n+a-1}\beta(1-\beta)^{n-1}\\
&= \alpha\beta(1-\alpha)^{a}\sum_{n=1}^{\infty}((1-\alpha)(1-\beta))^{n-1}\\
&= \frac{\alpha\beta(1-\alpha)^{a}}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}\\
&= \frac{\alpha\beta(1-\alpha)^{a}}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

(שימו לב, במעבר השלישי, לשימוש בכך ש־X,Y בלתי תלויים.)

מחישוב זה יוצא ש־

$$P(X=Y)+P(X=Y+1)=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}+\frac{\alpha\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-\alpha\beta}=\frac{\alpha\beta(2-\alpha)}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.$$

(אגב, אם $\alpha=\beta$, החישוב נותן $P(X=Y)+P(X=Y+1)=\alpha$. נסו להסביר עובדה זו באופן ישיר. הערה נוספת: חישובים כאלה קל בהרבה לבצע באותיות מאשר במספרים; אפשר ורצוי להציב את הערכים של α ו־β ברגע האחרון.)

לסעיף (ב), נסמן ב־W את מספר הנקודות שקולע יואב עד לקליעה הראשונה של חנן. ההתפלגות של W די מסובכת, ולכן איננו רוצים לחשב את התוחלת והשונות שלה ישירות. לעומת זאת, אם X ידוע, אז W הוא מספר הקליעות ב־$X-1$ נסיונות, ולכן $W|X\sim\mathrm{Bin}(X-1,\beta)$. מכאן מתקבל מיד ש־$\mathbf{E}(W|X)=\beta(X-1)$ וש־$\mathbf{V}(W|X)=\beta(1-\beta)(X-1)$. [אי־אפשר לענות לשאלה ב־"התוחלת היא βn כאשר n הוא מספר הזריקות עד לקליעה של חנן". התשובה צריכה להיות פונקציה של α ו־β, ללא משתנים שערכם אינו ידוע, וללא רשימות (אינסופיות) של אפשרויות.]

לפי חוק התוחלת החוזרת (שהוא וריאציה על נוסחת ההסתברות השלמה),

$$\mathbf{E}(W)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(W|X))=\mathbf{E}(\beta(X-1))=\beta(\mathbf{E}(X)-1)=\beta(\frac{1}{\alpha}-1)=\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha}.$$