נכתב על ידי יהונתן רגב

קומבינטוריקה

מספר האפשרויות לבחור – ארבעה סוגי בעיות

בחירה k מתוך n	הסדר חשוב	הסדר לא חשוב
עם החזרה	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
בלי החזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

1. בחירה עם החזרות כשיש חשיבות לסדר

תהי X קבוצה בגודל n.

כל בחירה עם החזרות וחשיבות לסדר היא ווקטור באורך k.

סופרים את כל הבחירות האפשריות.

מספר האפשרויות

$$|X^k| = n^k$$

דוגמה

בכד 10 כדורים ממוספרים.

מוציאים כדור – קובע מי זוכה בכובע.

מחזירים לכד. מוציאים כדור נוסף – קובע מי זוכה בחולצה.

מחזירים לכד. מוציאים כדור נוסף – קובע מי זוכה בתקליט.

"עקרון המכפלה"

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

מספר התוצאות האפשריות בזוג ניסויים שווה למכפלת מספרי האפשרויות בכל ניסוי בנפרד. חל בתנאי שאין קשר בין הניסויים.

תזכורת מתורת הקבוצות (מתמטיקה בדידה)

1. ווקטור ב"אורך" k

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \wedge b = d$$

$$(a,b,c) = \big(a,(b,c)\big)$$

$$\vdots$$

$$(a_1, \cdots, a_k) = \left(a_1, (a_2, \cdots, a_k)\right)$$

2. ווקטור ב"אורך" k עם ערכים מ – X

פונקציה $f: \{1, \cdots, k\} \to X$.

לסיכום, הוצאת הכדורים $x_1, \cdots, x_k \equiv$ ווקטור $(x_1, \cdots, x_k)$ כשלכל $1 \le i \le k$:

$X \ni x_i \equiv$ פונקציה $\{1, \cdots, k\} \to X$ המוגדרת ע"י $f(i) = x_i$.

2. בחירה בלי החזרה כשיש חשיבות לסדר.

דוגמה

בכד 10 כדורים ממוספרים.

הניסוי כמו בדוגמה 1, פרט לכך שאסור לתת לאותו אדם יותר מפרס אחד.

קבוצת הבחירות האפשריות $= \{(x_1, \cdots, x_k) \mid \forall i \neq j : x_i \neq x_j\} \equiv$פונקציה חד חד ערכית $\{f : \{1, \cdots, k\} \to X\}$.

<u>מספר האפשרויות</u>

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. בחירה בלי החזרה כשאין חשיבות לסדר.

דוגמה

בוחרים וועד כיתה (הומוגני) בגודל k מתוך כיתה של n תלמידים.

$X =$ קבוצת התלמידים, $|X| = n$.

$A =$ הוועד, $A \subseteq X$, $|A| = k$.

קבוצת הבחירות $\{A \subseteq X \mid |A| = k\}$.

תזכורת

מספר הדרכים לסדר n עצמים $= n! =$ עוצמת קבוצת הפונקציות החד חד ערכיות ועל מקבוצה בגודל n לעצמה.

$$n! = n \cdot (n-1)!\,, n \ge 1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1 = |\{\phi\}|$$

מודדים את הגודל של $\{A \subseteq X \mid |A| = k\}$.

כדי לספור תת קבוצות בגודל k נתבונן בכל ה - $n!$ דרכים לסדר את X. נחליט ש – A היא קבוצת k הערכים הראשונים.

<u>מספר האפשרויות</u>

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

"עקרון המנה"

נתונה פונקציה על $C \to D$ כך שלכל $x \in D$, $|f^{-1}(x)| = m$. אז

$$|D| = \frac{|C|}{m}$$

שימוש כדי לחשב את 3): $\{(x_1, \cdots, x_k) \mid \forall i \neq j : x_i \neq x_j\} \to P_k(x)$.

$$|P_k(x)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

4. **בחירה עם החזרה כשאין חשיבות לסדר.**

דוגמה

בחידון n משתתפים. החידון נמשך k סיבובים.

בכל סיבוב אחד המשתתפים זוכה בשקל אחד (רק התוצאה הסופית נחשבת).

בחירת הכדורים במקרה זה שקולה לקביעת ערכים $a_1, \cdots, a_n$ תחת האילוצים $0 \leq a_i$

ו- $\sum a_i = k$, כאשר $a_i =$ מספר הפעמים שיצא כדור i.

נבנה התאמה בין $\{Y = \{(a_1, \cdots, a_n) \mid \forall i : 0 \leq a_i \ \wedge \sum a_i = k$ לבין

$\{$"הווקטורים באורך $n + k - 1$ של k כדורים ו - $n - 1$ מחיצות"$\} = Z$.

למשל, התוצאה 3,3,4,7,3 מקודדת לווקטור: $(0, 0, 3, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

<u>מספר האפשרויות</u>

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

דוגמה

בחירת 2 מתוך 4	**הסדר חשוב**	**הסדר לא חשוב**
עם החזרה	$\begin{pmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ & 2,2 & 2,3 & 2,4 \\ & & 3,3 & 3,4 \\ & & & 4,4 \end{pmatrix}$
בלי החזרה	$\begin{pmatrix} & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 2,1 & & 2,3 & 2,4 \\ 3,1 & 3,2 & & 3,4 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ & & 2,3 & 2,4 \\ & & & 3,4 \\ & & & \end{pmatrix}$