תקציר התרגולים 1,2,3 - חבורות למחצה ומונואידים, חבורות ותתי חבורות.

2 בדצמבר 2016

תקציר

זהו תקציר של שלושת התרגולים הראשונים עם הגדרות והדוגמאות שהופיעו. במידה ויש טעות או דוגמא לא ברורה או נושא שהופיע בתרגול ולא הופיע פה - נא ליידע את המתרגל.

1 פעולות בינראיות וסגירות

הגדרה 1. תהיינה S,T קבוצה. פונקציה $* : S\times S \to T$ נקראת פעולה בינארית על S. לעיתים נסמן $a*b$ במקום $*(a,b)$ או ab כאשר ההקשר ברור.

דוגמה 2. מכפלה פנימית

$$\langle\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

המוגדרת על ידי

$$\langle v,u\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

הוא פעולה בינארית.

דוגמה 3. פעולת חיבור $+$ על מספרים ממשיים היא פעולה בינארית.

הגדרה 4. נאמר שפעולה בינארית על S סגורה אם לכל $s,t \in S$ מתקיים $s*t \in S$. במילים אחרות פעולה בינארית היא פונקציה מ $S \times S$ ל S. על פעולה בינארית סגורה נאמר לעיתים שהיא מקיימת את אקסיומת הסגירות.

דוגמה 5. חיבור הוא פעולה סגורה ומכפלה פנימית לא.

2 אסוציאטיביות ותתי חבורות

הגדרה 6. תהי S עם פעולה בינארית $*$ על S שמקיימת את אקסיומת הסגירות. נאמר ש $*$ היא פעולה בינארית אסוציאטיבית אם לכל $s,t,u \in S$ מתקיים $(s*t)*u = s*(t*u)$. במקרה הנ"ל ניתן לרשום פשוט $s*t*u$ וזה מה שנעשה בד"כ.

צורת רישום. בד"כ במקום להגיד קבוצה S עם פעולה בינארית $*$ עליה נרשום $(S,*)$.

הגדרה 7. הזוג $(S,*)$ כאשר $*$ היא פעולה אסוציאטיבית ובינארית נקרא חבורה למחצה.

צורת רישום. $\mathbb{Z}$ יסמן את קבוצה המספרים השלמים. $\mathbb{Z}^+$ יסמן את קבוצת המספרים השלמים החיוביים. $\mathbb{N}$ יסמן את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. (שימו לב - קבוצת הטבעיים כוללת את 0).

דוגמה 8. $(\mathbb{N},+)$ הוא חבורה למחצה.

צורת רישום. $M_n(\mathbb{F})$ או $\mathbb{F}^{n\times n}$ יסמנו את אוסף המטריצות מגודל $n\times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$.

דוגמה 9. $(M_n(\mathbb{F}),+)$ ו $(M_n(\mathbb{F}),\cdot)$ הוא חבורה למחצה.

צורת רישום. X^X מסמן את אוסף כל הפוקציות מהקבוצה X לעצמה. דהיינו

$$X^X = \left\{f \middle| \text{הוא פונקציה } f : X \to X\right\}.$$

הסימן $\circ$ יסמן את פעולת הרכבת פונקציות, דהיינו: אם נתונות פונקציות $f : A \to B$ ו $g : B \to C$ אזי מוגדתר הפונקציה $g \circ f : A \to C$ מוגדרת על ידי

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

דוגמה 10. הרכבת פונקציות היא פעולה אסוציאטיבית, $\left(X^X,\circ\right)$ הוא חבורה למחצה.

3 איבר היחידה ומונואידים.

הגדרה 11. תהי $(S,*)$ חבורה למחצה. $e \in S$ נקרא איבר היחידה אם לכל $s \in S$ מתקיים $e * s = s * e = s$.

תרגיל 12. תהי $(S,*)$ חבורה למחצה. הוכיחו שאם ב S קיים איבר היחידה אזי הוא יחיד.

פתרון: נניח ש $e,f \in S$ הם איברי היחידה של S. נוכיח $e = f$. אבל מהתכונות של איברי היחידה מתקיים $e = e * f = f$

הגדרה 13. חבורה לצחצה $(M,*)$ שקיים בה איבר היחידה נקראת מונואיד.

דוגמה 14. $(\mathbb{Z},+)$ הוא מונואיד ו 0 הוא איבר היחידה ביחס ל $+$. כמו כן $(\mathbb{N},+)$ הוא מונואיד ו0 הוא שוב איבר היחידה. לעומת זאת $(\mathbb{Z}^+,+)$ אינו מונואיד כי אם $a+e=a$ עבור איזהשהו e, אזי $e=0$ אבל e אינו מספר חיובי.

דוגמה 15. $(\mathbb{N},\max)$הוא מונואיד ו 0הוא איבר היחידה. אפשר לבדוק בקליות שלכל $a,b,c\in\mathbb{N}$ מתקיים $\max(a,\max(b,c))=\max(\max(a,b),c)$ו 0 הוא איבר היחידה מכיוון שמתקיים $\max(a,0)=a$ לכל מספר טבעי. לעומת זאת $(\mathbb{Z},\max)$ אינו מונואיד כי לא קיים מספר שלם קטן ביותר.

תזכורת: עבור קבוצות A,B החיתוך שלהן מגדר על ידי

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}.$$

(קבוצת כל האיברים שנמצאים גם ב A וגם ב B.)
בנוסף, $\mathcal{P}(X)$ מסמן את אוסך כל התתי-קבוצות של X.

דוגמה 16. לכל קבוצה X, $(P,\cap)$ הוא מונואיד. שוב, הסגירות ואסוציאטיביות ברורות וX עצמו הוא איבר היחידה.

תרגיל 17. תהי $(S,*)$ חבורה למחצה. הוכיחו שקיים מונואיד $(M,\circ)$ כך ש:

1. $S\subseteq M$
2. לכל $s,t\in S$ מתקיים $s\circ t=s*t$.

פתרון: אם ב S יש איבר יחידה - סיימנו. אחרת נירח $M=S\cup\{e\}$ עבור $e\notin M$ ונגדיר את $\circ$ על M באופן הבא.

(א) לכל $m,n\in S$ אזי $m\circ n=m*n$

(ב) לכל $m\in M$ נגדיר $s\circ e=e\circ s=s$.

בעזרת בדיקה מכנית אפשר לוודא שהפעולה אסוציאטיבית וסגורה ו ש e הוא איבר היחידה ביחס לפעולה הזאת.

צורת רישום 18. כשנסמן מונואיד (או חבורה...) לעיתים נסמן $(M,*,e)$ ולא $(M,*)$ - כלמר, נדגיש את איבר היחידה.

4 הפיכים וחבורות.

הגדרה 19. יהי $(M,*,e)$ מונואיד.

1. נאמר ש $a\in M$ הפיך משמאל אם קיים $b\in M$ כך ש $ba=e$. האיבר b נקרא הופכי שמאלי של a.
2. נאמר ש $a\in M$ הפיך מימין אם קיים $b\in M$ כך ש $ab=e$. האיבר b נקרא הופכי ימני של a.
3. נאמר ש $a\in M$ הפיך אם קיים $b\in M$ כך ש $ab=ba=e$. האיבר b נקרא ההופכי של a.

תרגיל 20. הוכיחו ש $a\in M$ הפיך אם ורק אם הוא אפיך גם מימין וגם משמאל.

פתרון: נניח ש a הפיך אזי קיים לו הופכי. בפרט, הוא גם הופכי שמאלי והופכי ימני של a ולכן הוא הפיך מימין ומשמאל. עכשו נניח ש a הפיך משמאל ומימין. אזי קיים לו הופכי שמאלי b והופכי ימני c. על מנת להוכיח ש a הוא הפיך צריך להוכיח ש $b = c$. אבל מתקיים

$$b = be = b\,(ac) = (ba)\,c = ec = c$$

והוכחנו את הדרוש.

תרגיל 21. יהי $(M, *, e)$ מונואיד. נניח ש a הפיך. הוכיחו שההופכי הוא יחיד.

פתרון: נניח ש a הוא הפיך ו b ו c הם ההופכיים שלו. נראה ש $b = c$. שוב, כמו בתרגיל הקודם

$$b = be = b\,(ac) = (ba)\,c = ec = c$$

כנדרש.

הערה. התרגילים האחרונים הם למעשה משפטים וניתן להשתמש בהם כשרוצים.

הגדרה 22. מונואיד $(G, *)$ שבו לכל איבר הפיך נקרא חבורה.

דוגמה 23. $(\mathbb{Z}, +)$ הוא חבורה. ראינו שהוא מונואיד ולכל איבר a הנגדי הוא $-a$. במקרה הזה ההופכי של כל איבר הוא פשוט הנגדי שלו.

דוגמה 24. $(\mathbb{N}, +)$ אינו חבורה, כי לאף איבר פרט ל 0 אין הופכי. (כי שוב, ההופכי חייב להיות נגדי ולכל מספר חיובי הנגדי שלו אינו טבעי).

דוגמה 25. $(M_n(\mathbb{F}), +)$ הוא חבורה וההופכי של כל מטריצה A הוא הנגדי שלו $-A$. המונואיד $(M_n(\mathbb{F}), \cdot, I_n)$ אינו חבורה כי לא כל מטריצה הפיכה.

דוגמה 26. יהי $\mathbb{F}$ שדה. אזי $(\mathbb{F}, +, 1)$הוא חבורה. לעומת זאת $(\mathbb{F}, *, 1)$ אינו חבורה מכיוון של 0 אין הופכי. קל לוודא ש $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, *, 1)$ מהווה שדה. נהוג לסמן אותו ב $\mathbb{F}^{\times}$ או $\mathbb{F}^{*}$.

נזכיר כמה עובדות בסיסיות ממתמטיקה בדידה.

הגדרה 27. תהיינה A, B קבוצות. נאמר ש $f : A \to B$ הפיכה משמאל אם קיימת $g : B \to A$ כך ש $g \circ f = id_A$, כאשר $id_A : A \to A$ היא פונקציית הזהות על A,

$$id(x) = x.$$

נאמר $f:A\to B$ הפיכה מימין אם קיימת $g:B\to A$ כך ש $f\circ g=id_B$.
פונקציה $f:A\to B$ נקראת הפיכה אם קיימת $g:B\to A$ המקיימת

$$f\circ g=id_B$$
$$g\circ f=id_A.$$

משפט 28. פונקציה f הפיכה משמאל אם ורק אם היא חד-חד ערכית. פונקציה f הפיכה מימין אם ורק אם היא על. פונקציה הפיכה אם ורק אם היא חד-חד ערכית ועל.

ניתן לשאול שאלה האם הפיכות משמאל שקולה להפיכות? כלמר - בהינתן איבר במונואיד, על מנת להוכיח שהוא הפיך האם באמת צריך להוכיח שהוא הפיך גם משמאל וגם מימין?

תרגיל 29. יהי $(M,*,e)$ מונואיד ונניח ש $g\in M$ הפיך משמאל. הוכיחו/הפריכו - g הפיך.

פתרון: לא. נביט במונואיד $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}},\cdot,id_X\right)$. נגדיר $f(n)=n+1$. ברור ש f הפיכה משמאל כי היא חח"ע אבל אינה הפיכה מימין כי היא אינה על ולכן אינה הפיכה במונואיד שלנו.