

תרגיל 7 מבוא לתורת החבורות

שאלה 7.1

1. תהי G חבורה ציקלית אינסופית. הוכיחו כי $G \simeq \mathbb{Z}$. הדרכה: קחו $g \in G$ יוצר והגדירו $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ לפי

$$f(n) = g^n$$

הראו כי f הוא איזומורפיזם.

2. תהי G חבורה ציקלית מסדר n הוכיחו כי $G \simeq \mathbb{Z}_n$. הדרכה: קחו $g \in G$ יוצר והגדירו $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$ לפי

$$f(n) = g^n$$

העזרו במשפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 7.2

1. תהינה G, H חבורות ויהיו $K \triangleleft G$ ו $N \triangleleft H$ שתי תתי חבורות נורמליות. הוכיחו כי $K \times N \triangleleft G \times H$ ומתקיים

$$G \times H / K \times N \simeq (G/K) \times (H/N)$$

2. מהו ה n שעבורו יש איזומורפיזם בביטוי הבא?

$$\mathbb{Z}_{24} / \langle 4 \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$$

הוכיחו שבאמת זה איזומורפיזם.

שאלה 7.3 כמה סימונים: עבור כל שדה \mathbb{F} נסמן ב \mathbb{F}^* את החבורה $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ (הייתי צריך להציג את הסימון הזה בשלב מוקדם יותר בקורס). בנוסף נסמן ב \mathbb{R}^+ את תת החבורה של \mathbb{R}^* שמכילה את כל המספרים החיוביים. כמו כן נסמן

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

שהיא גם חבורה שכבר דיברנו עליה. הוכיחו כי

1.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{R}^+$$

2.

$$\mathbb{C}^* / S^1 \simeq \mathbb{R}^+$$

שאלה 7.4 נביט על $GL_n(\mathbb{F})$. נסמן ב $B_n(\mathbb{F})$ תת החבורה שמכילה את כל המטריצות המשולשיות העליונות. אין צורך להוכיח שזו תת חבורה. נסמן ב $D_n(\mathbb{F})$ את תת החבורה שמכילה את כל המטריצות האלכסוניות. מצאו תת חבורה נורמלית $K \triangleleft B_n(\mathbb{F})$ כך ש $B_n(\mathbb{F})/K \simeq D_n(\mathbb{F})$. הוכיחו.

שאלה 7.5 תהי H קבוצת כל הסדרות הממשיות (כמו באינפי). נגדיר פעולה של חיבור איבר איבר. קל לוודא ש H חבורה.

$$(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots = \mathbb{R}^{\aleph_0} \text{ בעצם})$$

נגדיר פונקציה $f : H \rightarrow H$ בצורה הבאה. לכל $\{a_n\} \in H$

$$f(\{a_n\}) = \{b_n\}$$

כאשר b_n מוגדרת לפי

$$b_n = a_{n+1}$$

בעצם f פשוט מוחקת את האיבר הראשון של הסדרה. כלומר

$$f((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (a_2, a_3, \dots)$$

1. הוכיחו כי f היא אפימורפיזם.

2. האם קיימת חבורה G ותת חבורה נורמלית $N \triangleleft G$ כך ש $G/N \simeq G$?

שאלה 7.6 (לא קשור למשפט האיזומורפיזם הראשון - אבל כמו בתרגיל הקודם, נראה כאן התנהגות מוזרה של חבורות מנה)

1. הוכיחו כי $\mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z}$ (כן. חבורה יכולה להיות איזומורפית לתת חבורה שלה).

2. מצאו חבורה G ושתי תתי חבורות נורמליות $N_1, N_2 \triangleleft G$ כך ש $N_1 \simeq N_2$ אבל למרות זאת

$$G/N_1 \not\simeq G/N_2$$