תרגיל 7 מבוא לתורת החבורות

שאלה 7.1

1. תהי G חבורה ציקלית אינסופית. הוכיחו כי $G \simeq \mathbb{Z}$. הדרכה: קחו $g \in G$ יוצר והגדירו $f : \mathbb{Z} \to G$ לפי

$$f(k) = g^k$$

הראו כי f הוא איזומורפיזם.

2. תהי G חבורה ציקלית מסדר n הוכיחו כי $G \simeq \mathbb{Z}_n$. הדרכה: קחו $g \in G$ יוצר והגדיר $f : \mathbb{Z} \to G$ לפי

$$f(k) = g^k$$

העזרו במשפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 7.2

1. תהינה G, H חבורות ויהיו $K \lhd G$ ו $N \lhd H$ שתי תתי חבורות נורמליות. הוכיחו כי $K \times N \lhd G \times H$ ומתקיים

$$G \times H/K \times N \simeq (G/K) \times (H/N)$$

2. מהו ה n שעבורו יש איזומורפיזם בביטוי הבא?

$$\mathbb{Z}_{24}/\langle 4\rangle \simeq \mathbb{Z}_n$$

הוכיחו שבאמת זה איזומורפיזם.

שאלה 7.3 כמה סימונים: עבור כל שדה $\mathbb{F}$ נסמן ב $\mathbb{F}^*$ את החבורה $(\mathbb{F}\backslash\{0\}, \cdot)$ (הייתי צריך להציג את הסימון הזה בשלב מוקדם יותר בקורס). בנוסף נסמן ב $\mathbb{R}^+$ את תת החבורה של $\mathbb{R}^*$ שמכילה את כל המספרים החיוביים. כמו כן נסמן

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

שהיא גם חבורה שכבר דיברנו עליה. הוכיחו כי

1.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{R}^*$$

.2

$$\mathbb{C}^*/S^1 \simeq \mathbb{R}^+$$

שאלה 7.4 נביט על $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. נסמן ב $\mathrm{B}_n(\mathbb{F})$ תת החבורה שמכילה את כל המטריצות המשולשיות העליונות. (אין צורך להוכיח שזו תת חבורה). נסמן ב $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$ את תת החבורה שמכילה את כל המטריצות האלכסוניות.

מצאו תת חבורה נורמלית $K \lhd \mathrm{B}_n(\mathbb{F})$ כך ש $\mathrm{B}_n(\mathbb{F})/K \simeq \mathrm{D}_n(\mathbb{F})$. הוכיחו.

שאלה 7.5 תהי H קבוצת כל הסדרות הממשיות (כמו באינפי). נגדיר פעולה של חיבור איבר איבר. קל לוודא ש H חבורה.

(בעצם $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots = \mathbb{R}^{\aleph_0}$)

נגדיר פונקציה $f : H \to H$ בצורה הבאה. לכל $\{a_n\} \in H$

$$f(\{a_n\}) = \{b_n\}$$

כאשר b_nמוגדרת לפי

$$b_n = a_{n+1}$$

בעצם f פשוט מוחקת את האיבר הראשון של הסדרה. כלומר

$$f((a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (a_2, a_3, \ldots)$$

1. הוכיחו כי f היא אפימורפיזם.

2. האם קיימת חבורה G ותת חבורה נורמלית $G \lhd N \neq \{e\}$ כך ש $G \simeq G/N$?

שאלה 7.6 (לא קשור למשפט האיזומורפיזם הראשון - אבל כמו בתרגיל הקודם, נראה כאן התנהגות מוזרה של חבורות מנה)

1. הוכיחו כי $\mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z}$ (כן. חבורה יכולה להיות איזומורפית לתת חבורה שלה.)

2. מצאו חבורה G ושתי תתי חבורות נורמליות $N_1, N_2 \lhd G$ כך ש $N_1 \simeq N_2$ אבל למרות זאת

$$G/N_1 \not\simeq G/N_2$$