שיעורי בית 6

18 בדצמבר 2016

1. תהא G חבורה ו $H \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. הוכח/הפרך

(א) אם G ציקלית גם G/H ציקלית.
פתרון: יהא $g \in G$ יוצר אזי $gH \in G/H$ יוצר. הוכחה: יהא $g'H \in G/H$ לפי הגדרת g קיים n כך ש $g^n = g'$ ואז

$$(gH)^n = g^nH = g'H$$

(ב) אם G/H ציקלית גם G ציקלית.
פתרון: ניקח חבורה G שאינה חילופית (ולכן לא ציקלית). נגדיר $H = G$ תת חבורה נורמלית. אזי G/H עם איבר יחיד ולכן ציקלית אבל החבורה G אינה ציקלית.

2. נתון: $H_2 \trianglelefteq G_2$ וגם $H_1 \trianglelefteq G_1$. הוכח:

(א) $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$
פתרון: יהא $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ ו $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$. צריך להוכיח כי

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} \in H_1 \times H_2$$

אכן, לפי הגדרת חבורת המכפלה $G_1 \times G_2$

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2)(h_1, h_2)\left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right) = \left(g_1h_1g_1^{-1}, g_2h_2g_2^{-1}\right)$$

כיוון ש H_1 נורמלית נקבל כי $g_1h_1g_1^{-1} \in H_1$ ובגלל ש H_2 נורמלית נקבל כי $g_2h_2g_2^{-1} \in H_2$ ולכן

$$\left(g_1h_1g_1^{-1}, g_2h_2g_2^{-1}\right) \in H_1 \times H_2$$

(ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$
פתרון: נגדיר את הומורפיזם ההטלה

$$\phi : G_1 \times G_2 \to (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$$

ע"י

$$(g_1, g_2) \mapsto (g_1H_1, g_2H_2)$$

זהו הומו' על (בדקו!) נרצה להשתמש במשפט האיזו' הראשון. קודם נחשב את הגרעין של ϕ

$$\begin{aligned}
\ker\phi &= \{(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2 : \phi((g_1,g_2)) = 0\} \\
&= \{(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2 : (g_1H_1, g_2H_2) = 0\} \\
&= \{(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2 : g_1 \in H_1, g_2 \in H_2\} = H_1 \times H_2
\end{aligned}$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

3. תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי

$$\forall x \in N, y \in K : xy = yx$$

[הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$]
פתרון: יהא $x \in N, y \in K$. מהגדרת N חבורה נורמאלית נקבל כי

$$y^{-1}xy \in N$$

ומסגירות בחבורה נקבל כי גם

$$x^{-1}y^{-1}xy \in N$$

באופן דומה, מנורמליות של K נקבל כי

$$x^{-1}y^{-1}x \in K$$

ועם סגירות

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K \cap N = \{e\}$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy = e$$

שזה אומר

$$xy = yx$$

4. תהא G חבורה ו $N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית המקיימת $\left|{}^{G}/_{N}\right| = p$ כאשר p מספר ראשוני.

(א) הוכיחו לכל $g \in G - N$ מתקיים כי $g, g^2, \ldots g^p$ נציגים של מחלקות שונות ב ${}^{G}/_{N}$ (ולכן ${}^{G}/_{N} = \left\{g^i N \,:\, 1 \le i \le p\right\}$)

פתרון: כיוון ש N נורמילית ${}^{G}/_{N}$ חבורה. כעת יהא $g \in G - N$ אזי $gH \in {}^{G}/_{N}$ שונה מהאיבר הנטרלי. נסתכל על תת החבורה הנוצרת על ידו $\langle gH\rangle \le {}^{G}/_{N}$. גודל תת חבורה זאת צריכה לחלק את סדר החבורה = p ולכן גם היא שווה ל p- (כי p ראשוני ו $|\langle gH\rangle| > 1$. לכן בקבוצה $\langle gH\rangle = \left\{g^i H \,:\, i \in \mathbb{N}\right\}$ יש p איברים שונים שהם $\left\{g^i H \,:\, i = 1, \ldots, p\right\}$ בפרט $g, g^2, \ldots g^p$ נציגים של מחלקות שונות

(ב) הוכיחו כי אם בנוסף $N \subseteq Z(G)$ (כלומר N מוכלת במרכז של G) אזי G חבורה חילופית (או מילים אחרות $Z(G) = G$).

פתרון: יהא $a, b \in G$. מסעיף קודם נבחר $g \in G - N$ ונקבל כי

$$G = \bigcup_{i=1}^{p} g^i H$$

כי G היא איחוד כל הקוסטים. אזי קיימים i, j כך ש $a \in g^i N,\, b \in g^j N$ ואז קיימים $n_1, n_2 \in N$ כך ש

$$a = g^i n_1,\, b = g^j n_2$$

כיוון שנתון $N \subseteq Z(G)$ בפרט n_1, n_2 מתחלפים עם כל איבר אחר ב G ואז

$$ab = g^i n_1 g^j n_2 = g^i g^j n_1 n_2 = g^j g^i n_1 n_2 = g^j n_2 g^i n_1 = ba$$

5. תהא G חבורה חילופית. נגדיר $D = \{(g, g) \,:\, g \in G\} \subseteq G \times G$. הוכיחו כי זהוי תת חבורה נומאלית של $G \times G$ והראו כי

$${}^{G\times G}/_{D} \cong G$$

פתרון: טענה D היא תת חבורה. הוכחה $(e, e) \in D$ לפי הגדרה ולכן הנטרלי שייך ל D. אם $(g_1, g_1), (g_2, g_2) \in D$ אזי גם הכפל שלהם $(g_1 g_2, g_1 g_2) \in D$. אם $(g, g) \in D$ אזי גם ההפוכי שלו $\left(g^{-1}, g^{-1}\right) \in D$. ולכן D תת חבורה.

טענה: היא גם נורמאלית. הוכחה: בחבורה חילופית, כל תת חבורה היא נורמלית.

כעת נגדיר

$$\phi : G \times G \to G$$

ע"י

$$(x, y) \to xy^{-1}$$

טענה זהו אפימורפיזים. הוכחה:

$$\phi\left((x,y)\,(z,w)\right)=\phi\left((xz,yw)\right)=xz\,(yw)^{-1}=xzw^{-1}y^{-1}=xy^{-1}zw^{-1}=\phi\left((x,y)\right)\phi\left((z,w)\right)$$

בנוסף לכל $g\in G$ ניקח את (g,e) כמקור. כעת נחשב את הגרעין

$$\ker\phi=\{(x,y)\in G\times G:\ \phi(x,y)=e\}=\left\{(x,y)\in G\times G:\ xy^{-1}=e\right\}=\{(x,y)\in G\times G:\ x=y\}=D$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

6. תהא G_1,G_2 שתי חבורות עם סדרים זרים (כלומר $\gcd(|G_1|,|G_2|)=1$). הוכיחו כי קיים הומו' אחד $\phi:G_1\to G_2$[רמז: חישבו על התמונה $\phi(G_1)$]
פתרון: יהא $\phi:G_1\to G_2$ הומו'. אזי התמונה $H=Im(\phi)\leq G_2$ היא תת חבורה של G_2 ולכן $\frac{|G_2|}{|H|}\in\mathbb{Z}$ לפי משפט לגרנז'. מצד שני לפי משפט האיזו' מתקיים כי

$$G_1/\ker\phi\cong H=Im(\phi)$$

אזי

$$\frac{|G_1|}{|\ker\phi|}=|H|$$

ואז

$$\frac{|G_1|}{|H|}=|\ker\phi|\in\mathbb{Z}$$

כלומר $|H|$ מחלק גם את $|G_1|$וגם את $|G_2|$. כיוון שאלו מספרים זרים נקבל כי $|H|=1$ ולכן $H=\{e_{G_2}\}$. אם התמונה של ההמור' זה רק האיבר הנטרלי של G_2אזי מדובר בהומו' הטריאלי (ששולח כל איבר ב G_1 לנטרלי של G_2).

7. נגדיר $G=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$ מעגל היחידה עם פעולת כפל . הוכיחו כי

(א) $G\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ [הדרכה: השתמשו בפונקציה $e^{2\pi xi}$]
פתרון: נגדיר את הפונקציה

$$\phi:\mathbb{R}\to G$$

ע"י

$$x\mapsto e^{2\pi xi}$$

נראה כי זהו אפימורפיזים: אכן

$$\phi(x_1+x_2)=e^{2\pi(x_1+x_2)i}=e^{2\pi x_1 i}e^{2\pi x_2 i}=\phi(x_1)\phi(x_2)$$

והיא על כי לכל $z\in G$ קיימת לו הצגה פולארית. כלומר $z=e^{2\pi xi}$ עבור $0\leq x<2\pi$ והוא יהיה מקור אפשרי אחד.
לפי משפט האיזו' נקבל כי

$$\mathbb{R}/\ker\phi\cong G$$

נותר להראות כי $\ker\phi = \mathbb{Z}$. אכן

$$\ker\phi = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \phi(x) = 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, e^{2\pi xi} = e^{2\pi 0i}\right\} = \mathbb{Z}$$

כי

$$e^{2\pi x_1 i} = e^{2\pi x_2 i} \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$$

[זכרו: הפונקציה $e^{2\pi xi}$ מחזורית 2π]

(ב) נגדיר $H \leq G$ להיות כל שורשי היחידה מסדר כלשהו. כלומר

$$H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

כאשר $U_n = \{z \in G : z^n = 1\}$ הם שורשי היחידה מסדר n.
בעזרת סעיף קודם, הראו כי H איזומורפית ל $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
פתרון: הפונקציה

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to G$$

המוגדרת ע"י

$$x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi xi}$$

היא איזומורפיזים לפי סעיף קודם ובפרט חח"ע. אם נצמצם אותה לקבוצה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אזי נקבל מונומורפיזים

$$\phi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to G$$

המוגדר ע"י

$$x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi xi}$$

כיוון ש

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong Img(\phi) \leq G$$

נותר לחשב את $Img(\phi)$:

$$Img(\phi) = \{\phi(x+\mathbb{Z}) \,:\, x+\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\} = \{\phi(x+\mathbb{Z}) \,:\, x \in \mathbb{Q}\} = \left\{e^{2\pi xi} \,:\, x \in \mathbb{Q}\right\} = \left\{e^{2\pi \frac{a}{b} i} \,:\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$$

טענה: $H' = \left\{e^{2\pi \frac{a}{b} i} \,:\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\} = H$.

הוכחה: $(\subseteq)$ אם נעלה את $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in H'$ בחזקת b נקבל $\left(e^{2\pi \frac{a}{b} i}\right)^b = e^{2\pi ai} = 1$ ולכן $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in U_b \subset H$

$(\supseteq)$יהא $z \in H$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $z \in U_n$. נרשום $z = e^{2\pi xi}$ ההצגה הפולארית שלו אזי $e^{2\pi nxi} = z^n = 1$ כלומר $nx \in \mathbb{Z}$ מאותו נימוק מסעיף קודם. ומכאן ש $x \in \mathbb{Q}$ ולכן $z = e^{2\pi xi} \in H'$