

תרגיל בית 7 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 7.1.2018.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שידועים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה ויהיו $A, B \subseteq G$ תת-קבוצות שלה. לכל סעיף כתבו פסוק לוגי שקול אך ורק עם כמתים (כמו \forall ו- \exists) ושיוויונות מן הצורה $xy = zw$ עבור איברים של הקבוצות.

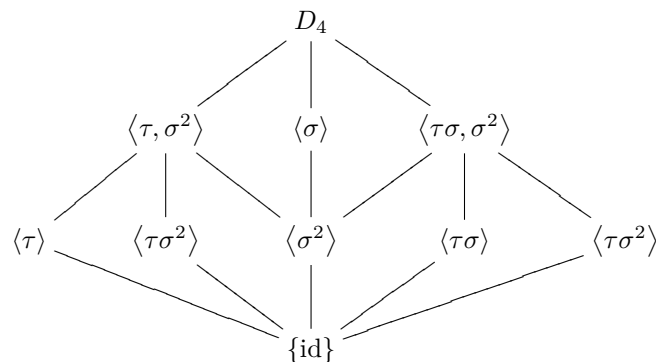
א. $ab = ba$ לכל איבר a של A ואיבר b של B .

ב. $aB = Ba$ לכל איבר a של A .

ג. $AB = BA$.

נסו למצוא דוגמאות שמראות שיש הבדל בין הסעיפים השונים (מי גורר את מי?).

שאלה 2. לפניכם סריג תת-החבורות של D_4 :



מצאו את סריג תת-חבורות של $D_4 / \langle \sigma^2 \rangle$ ואת כל המנות שלה בעזרת משפטי האיזומורפיזמים.

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 3. תהינה G_1, \dots, G_n חבורות ותהינה H_1, \dots, H_n תת-חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i \triangleleft G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \dots \times H_n \triangleleft G_1 \times \dots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1 \times \dots \times G_n) / (H_1 \times \dots \times H_n) \cong G_1/H_1 \times \dots \times G_n/H_n$.

שאלה 4. תהי $N \triangleleft G$ תת-חבורה נורמלית סופית, $H \leq G$ תת-חבורה מאינדקס סופי ונניח $([G:H], |N|) = 1$. הוכיחו כי $N \leq H$.

שאלה 5. נסמן כמה מטריצות מרוכבות הפיכות

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב לא להתבלבל בתפקיד של 1 ושל i בתוך המטריצות שם הם מספרים מרוכבים, וכסימון למטריצות. נגדיר את חבורת הקוורטניונים להיות $Q = \langle i, j, k \rangle \leq GL_2(\mathbb{C})$.

א. בתאריך 16 באוקטובר 1843 חרט ויליאם רואן המילטון על גשר בָרוֹם

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

חשבו את טבלת הכפל של Q (עם הסברים קצרים). רמז: המילטון לא טעה, והחבורה סופית אחרי שמבינים שהאיברים הם רק $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

ב. הוכיחו שכל תת-חבורות של Q הן נורמליות (ואבליות, פרט ל- Q עצמה). רמז: בדקו מה יכול להיות האינדקס, ולמקרה היחיד שהוא קצת קשה העזרו בסעיף הקודם.

ג. מצאו תת-חבורה ציקלית ולא נורמלית של $Q \times \mathbb{Z}_4$.

שאלה 6. לסעיף השני כדאי להעזר בשאלה 5.

א. תהי G חבורה שחיתוך כל תת-חבורות הלא טריוויאליות שלה אינו טריוויאלי. כלומר

$$\bigcap_{\substack{H \leq G \\ H \neq \{e\}}} H \neq \{e\}$$

נניח כי G פועלת על קבוצה X עבודה $|G| = k < |X|$. הוכיחו שלא קיים שיכון $\varphi: G \rightarrow S_k$.

ב. הסיקו כי אין שיכון $\varphi: Q \rightarrow S_k$ לכל $k < 8$, אבל הראו שיש שיכון $\varphi: Q \rightarrow S_8$.

שאלה 7 (קצת חזרה). הפריכו או הביאו דוגמה לטענות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f: \mathbb{Z}_{56} \rightarrow \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_8$.

ב. קיים מונומורפיזם $f: \mathbb{Z}_{40} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

ג. קיים איזומורפיזם $f: S_4 \rightarrow D_{12}$.

ד. קיים מונומורפיזם $f: A_5 \rightarrow \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_5 \times U_{14}$.

ה. קיים מונומורפיזם $f: A_4 \rightarrow D_{12} \times S_5$.

ו. קיים אפימורפיזם $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$. רמז: הבינו למה מנה של חבורה ציקלית היא ציקלית.

שאלה 8. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$. נגדיר את הליבה של H ב- G להיות

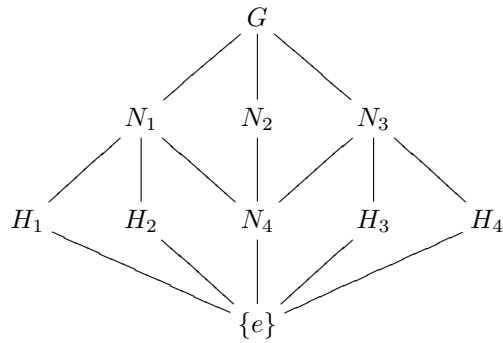
$$\text{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

- א. הוכיחו כי $\text{Core}(H) \leq G$. רמז: יותר קל להתחיל בהוכחת $gHg^{-1} \leq G$ לכל $g \in G$.
 ב. הוכיחו ש- $\text{Core}(H)$ היא תת-החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב- H .
 ג. תנו דוגמה לחבורה G , ולשתי תת-חבורות לא טריוויאליות H, K (הן לא G ולא $\{e\}$) כך ש- $\text{Core}(H) = \{e\}$ וגם $\text{Core}(K) = K$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי חבורה G עם סריג תת-החבורות הבא:



כאשר $H_i \leq G$ ו- $N_i \triangleleft G$. הוכיחו כי $G \cong D_4$. רמז: סמנו $k = [G : N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה בדרך תצטרכו להוכיח ש- k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k = 2$.

בהצלחה!