

תרגיל 8 אנליזה הרמונית תשע"ט

17 בדצמבר 2018

להגשה בשבוע במתחיל ב30.12, כ"ב טבת.

1. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$, ויהיו a_n, b_n מקדמי פורייה של f . נניח שקיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו $a_n, b_n \leq \frac{1}{n^{k-1}}$. הוכיחו שהפונקציה f גזירה k פעמים.
2. בתרגיל הבא נוכיח את שוויון פרסבל המוכלל: תהיינה f, g פונקציות רציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$, ויהיו a_0, a_n, b_n מקדמי פורייה של f , $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ מקדמי פורייה של g . אזי:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n})$$

נעשה זאת בשלבים.

(א) לפי פרסבל, רשמו למה שווים ארבעת האינטגרלים הבאים:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f \pm g|^2 dx, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f \pm ig|^2 dx$$

(ב) הוכיחו שבמרחב מכפלה פנימית V , לכל $u, v \in V$ מתקיימת הזהות:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i \|u + iv\|^2 - i \|u - iv\|^2 \right)$$

(ג) רשמו את הזהות עבור $f, g \in E[-\pi, \pi]$ (עם המכפלה הפנימית המתאימה).

(ד) הסיקו את שוויון פרסבל המוכלל.

3. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$. נניח שמקדמי פורייה של f הם: $a_0 = a_n = 0, b_n = 2^{-n}$. נסמן ב- $S(x)$ את סכום טור פורייה בנקודה x .

- (א) הוכיחו או הפריכו: f רציפה.
- (ב) מצאו את S במפורש; שחקו בין ההצגה המעריכית להצגה הקוטבית.
- (ג) מצאו את מקדמי פורייה של S' .