

משפט 6

(Ω, \mathcal{S}, μ) מרחב מדידה

נניח f אינטגרלית חיובית ו- $\{A_n\}_n$ סדרה עולה של קבוצות מדידות:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad \{A_n\}_n \subset \mathcal{S}$$

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{מדידה}$$

האם מתקיים

$$? \quad \int_{A_n} f(x) d\mu \xrightarrow{?} \int_A f(x) d\mu$$

תשובה: כן, אך רק עבור פונקציות:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0,1] \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, \quad x \in \mathbb{Q} \text{ ו-} (p,q \in \mathbb{Z}) \\ 1 & \text{אחרת (כל } x \text{ אחרת)} \end{cases}$$

על $[a,b]$.

תהי $\{f_n\}_n$ סדרה עולה של פונקציות מדידות $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\mu = \int_{\Omega} f(x) d\mu \quad \text{האם מתקיים בהכרח?}$$

? האם ניתן להסיק מ- $f_n \rightarrow f$ כי $\int f_n \rightarrow \int f$?