

## אנליזה מודרנית 1 - תרגול 13

21 בינואר 2015

**משפט 13.1** משפט הצפיפות של לבג  
תהי  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  אזי כמעט לכל  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ :

$$\frac{1}{m(B(x_0, \epsilon))} \int_{B(x_0, \epsilon)} f(x) dm^d(x) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f(x_0)$$

**הערה 13.2** למעשה מספיק לדרוש ש- $f$  אינט' מקומית (ז"א על כל קבוצה ממידה סופית).

**הערה 13.3** מקרה פרטי  $f = \mathbb{1}_{\mathbb{A}}$  (מדידה) נקבל: כמעט לכל  $x \in \mathbb{A}$

$$\frac{m(B(x, \epsilon) \cap \mathbb{A})}{m(B(x, \epsilon))} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1$$

**תרגיל**

תהי  $A \subseteq [0, 1]$  מדידה, ויהי  $\alpha > 0$  כך שלכל קטע  $I \subseteq [0, 1]$

$$\frac{m(I \cap A)}{m(I)} > \alpha$$

הראו ש- $m(A) = 1$ . הוכחה:

$$1 = \frac{m(I)}{m(I)} = \frac{m(I \cap A) + m(I \cap A^c)}{m(I)}$$

לכן  $\frac{m(I \cap A^c)}{m(I)} \leq 1 - \alpha$  לכל  $I \subseteq [0, 1]$  אם  $m([0, 1] \cap A^c) > 0$  תהי  $x_0 \in A^c \cap [0, 1]$  נק' צפיפות, כלומר כך שמתקיים עבור  $0 < \epsilon$  מספיק קטן:

$$1 - \alpha \geq \frac{m(A \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon))}{m((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon))} = \frac{m(B(x_0, \epsilon) \cap A^c)}{m(B(x_0, \epsilon))} \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

סתירה. לכן

$$m(A^c \cap [0, 1]) = 0 \Rightarrow m(A) = 1$$

■

### תרגיל

תהי  $f \in L^1(\mathbb{R})$  הוכיחו שקיימת סדרה  $\{f_n\} \subset C(\mathbb{R})$  כל ש:  $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$  (כלומר הפו' הרציפות צפופות ב- $L^1$ ). **הוכחה:** נגדיר

$$f_n(x_0) := n \int_{x_0 - \frac{1}{2^n}}^{x_0 + \frac{1}{2^n}} f dm$$

לפי משפט הצפיפות של לבג  $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ . נראה ש  $f_n$  רציפות:

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_n(x_0) &= n \left( \int_{x - \frac{1}{2^n}}^{x + \frac{1}{2^n}} f(t) dt - \int_{x_0 - \frac{1}{2^n}}^{x_0 + \frac{1}{2^n}} f(t) dt \right) \\ &= n \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B(x, \frac{1}{2^n})}(t) dt - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B(x_0, \frac{1}{2^n})}(t) dt \right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned}$$

■ (לפי משפט התכנסות הנשלטת עם מז'ורנטה  $|f|$ ).

### תרגיל

תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  מדידה, הראו שלכמעט כל  $x \in A$ :

$$d(x+y, A) = o(|y|)_{|y| \rightarrow 0}$$

יהי  $\left[ f(y) = o(g(y))_{y \rightarrow 0} \Leftrightarrow \frac{f(y)}{g(y)} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \right]$  **הוכחה:** מספיק להראות לכל נק' צפיפות. יהי  $0 < \epsilon$ , נראה שקיים  $0 < \delta$  כך שלכל  $y < \delta$  מתקיים  $\frac{d(x+y, A)}{|y|} < \epsilon$ . תהי  $x \in A$  נק' צפיפות:

$$\frac{m(A \cap [x - \epsilon, x + \epsilon])}{2\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 1$$

לכן, עבור  $\alpha = 1 - \frac{\epsilon}{2}$  קיים  $0 < \delta$  כך שלכל  $|y| < \delta$ :

$$\frac{m(A \cap [x - y, x + y])}{2|y|} > \alpha$$

נניח בשלילה

$$\frac{\inf \{|x + y - a| : a \in A\}}{|y|} = \frac{d(x+y, A)}{|y|} \geq \epsilon$$

(נניח לה"כ  $y > 0$ ) נקבל:

$$A \cap (x + y - \epsilon y, x + y) = \emptyset$$

(אחרת יש נקודה ב- $A$  שהמרחק בינה לבין  $x + y$  קטן מ- $\epsilon y$  בסתירה להנחת השלילה).

$$\begin{aligned} \alpha = 1 - \frac{\epsilon}{2} &< \frac{m(A \cap (x - y, x + y))}{2y} \\ &\leq \frac{m([x - y, x + y - \epsilon y])}{2y} \\ &= \frac{2y - \epsilon y}{2y} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

■ סתירה ולכן  $\frac{f(x+y, A)}{|y|} < \epsilon$ .

**תרגיל:**

מצאו  $A \subseteq [0, 1]$  שמקיימת:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{m(A \cap [0, 2^{-n}])}{2^{-n}} = \frac{1}{2}$$

**הוכחה:** הרעיון כדלהלן: נרצה לבנות  $A$  כך ש- $\frac{1}{2}A = A \cap [0, \frac{1}{2}]$ , ובאופן כללי:  $\forall n : m(A) = \frac{1}{2}$  וכן  $2^{-n}A = A \cap [0, 2^{-n}]$  נגדיר

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} [3 \cdot 2^{-n-2}, 2^{-n}]$$

אז  $A$  מקיימת:

$$2^{-n}A = A \cap [0, 2^{-n}]$$

והמידה:

$$m(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

■

## פונקציות בעלות השתנות חסומה

**תזכורת:**

$f$  בעלת השתנות חסומה בקטע  $I = [a, b]$  אם:

$$\text{Var}_I(f) := \sup_T \sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \infty$$

כאשר  $T_{[a,b]} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

**הערה 13.4** פו' בעלת השתנות חסומה אם"ם היא מהווה הפרש של שתי פו' מונוטוניות ולכן בעלת לכל היותר מס' בן מניה של נק' אי רציפות והן מסוג ראשון (קפיצה). לכן הנגזרת קיימת כב"מ.

### תרגיל

הראו כי ההשתנות של  $f$  ב

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

אינה חסומה ב  $I = [0, 1]$ . **הוכחה:** נבחר את החלוקה הבאה: לכל  $n$  א"ז (אי זוגי):

$$T_{n+1} : 0 < \frac{2}{\pi(2n-1)} < \frac{2}{\pi(2n-3)} < \dots < \frac{2}{\pi} < 1$$

א"ז:

$$x_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{2}{\pi(2n-2k+1)} = \frac{1}{\pi(n-k)+\frac{\pi}{2}} & k = 1, \dots, n \\ 1 & k = n+1 \end{cases}$$

כעת:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{x_k}\right)_{k=1, \dots, n} &= \sin\left((n-k)\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos((n-k)\pi) \\ &= (-1)^{n-k} = \underbrace{\quad}_{n \text{ is odd}} (-1)^{1+k} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ \sum_{k=1, \dots, n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= |x_k + x_{k-1}| \geq 2|x_k| \end{aligned}$$

כעת:

$$\begin{aligned} \text{Var}_I f &\geq \sup \sum_{k=1}^{n+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k+\frac{1}{2})} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

■

### תרגיל המשך

עבור אלו ערכי  $\alpha$  הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

בעלת השתנות חסומה ב  $I = [0, 1]$ ?

**תיזכורת:**

אם  $f \in C^1(I)$  אז

$$\text{Var}_I f = \int_I |f'(x)| dx$$

**הוכחה:** עבור חלוקה כלשהי  $x_0 < \dots < x_n$  לפי משפט הערך הממוצע, לכל  $1 \leq k \leq n$  קיים  $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$  כך ש:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} &= f'(t_k) \\ |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= |f'(t_k)| |x_k - x_{k-1}| \end{aligned}$$

נתבונן בסכום ההפרשים ונקבל:

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |f'(t_k)| |x_k - x_{k-1}|$$

כאשר נשאיף  $n \rightarrow \infty$  בשני האגפים נקבל:

$$\text{Var}_I(f) = \int_I |f'(t)| dt$$

■

כיון שזה נכון לכל חלוקה של הקטע.

הערה: מספיק לדרוש  $f \in AC$ .

**הוכחה לתרגיל:**

בכל קטע  $[\epsilon, 1]$  ( $\epsilon > 0$ ) נגזור:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

עבור  $2 < \alpha$  נקבל  $f'(x)$  חסומה ב- $I$  ולכן

$$\text{Var}_I f = \int_I |f'(t)| dt < \infty$$

לכל  $1 \leq \alpha \leq 2$

$$\begin{aligned} \text{Var}_{[\epsilon,1]} &\leq \int_{\epsilon}^1 |\alpha x^{\alpha-1}| dx + \int_{\epsilon}^1 |x^{\alpha-2}| dx \\ &= x^{\alpha} \Big|_{\epsilon}^1 + \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1} \Big|_{\epsilon}^1 \\ &= 1 - \epsilon^{\alpha} + \frac{1 - \epsilon^{\alpha-1}}{\alpha-1} < \infty \\ \text{Var}_I f &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Var}_{[\epsilon,1]} f < \infty \end{aligned}$$

כיוון ש  $\text{Var}_I f$  פונ' רציפה ביחס לקבוצה עבור  $f$  (וודאו).  
 כש  $\alpha \leq 1$  נבחר חלוקה בדומה לתרגיל הקודם: לכל  $n$  אי זוגי:

$$x_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{1}{\pi(n-k) + \frac{\pi}{2}} & k = 1, \dots, n \\ 1 & k = n + 1 \end{cases}$$

וכמו שם נקבל:

$$\begin{aligned} \text{Var}_I \left( x^\alpha \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right) &\geq 2 \sum_{k=1}^n |x_{k-1}|^\alpha \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n - k + \frac{1}{2})^\alpha} \end{aligned}$$

אבל

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n - k + \frac{1}{2})^\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\frac{1}{2} + k)^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$