אנליזה מודרנית 1 - תרגול 13

22 בינואר 2015

משפט 13.1 משפט הצפיפות של לבג

תהי $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי כמעט לכל $x_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$\frac{1}{m\left(B\left(x_0,\epsilon\right)\right)}\int_{B\left(x_0,\epsilon\right)} f\left(x\right)dm^d\left(x\right) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} f\left(x_0\right)$$

הערה 13.2 למעשה מספיק לדרוש ש־f אינט' מקומית (ז"א על כל קבוצה ממידה סופית).

הערה 13.3 מקרה פרטי $f = \mathbb{1}_{\mathbb{A}}$ ($\mathbb{A}$ מדידה) נקבל: כמעט לכל $x \in \mathbb{A}$:

$$\frac{m\left(B\left(x,\epsilon\right)\cap\mathbb{A}\right)}{m\left(b\left(x,\epsilon\right)\right)} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 1$$

תרגיל

תהי $A \subseteq [0,1]$ מדידה, ויהי $\alpha > 0$ כך שלכל קטע $I \subseteq [0,1]$:

$$\frac{m\left(I\cap A\right)}{m\left(I\right)} > \alpha$$

הראו ש־$m\left(A\right) = 1$. **הוכחה:**

$$1 = \frac{m\left(I\right)}{m\left(I\right)} = \frac{m\left(I\cap A\right)+m\left(I\cap A^c\right)}{m\left(I\right)}$$

לכן $\frac{m\left(I\cap A^c\right)}{m\left(I\right)} \leq 1-\alpha$ לכל $I \subseteq [0,1]$.אם $m\left([0,1]\cap A^c\right) > 0$, תהי $x_0 \in A^c\cap[0,1]$ נק' צפיפות, כלומר כך שמתקיים עבור $\epsilon > 0$ מספיק קטן:

$$1-\alpha \geq \frac{m\left(A\cap\left(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon\right)\right)}{m\left(\left(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon\right)\right)} = \frac{m\left(B\left(x_0,\epsilon\right)\cap A^c\right)}{m\left(B\left(x_0,\epsilon\right)\right)} \geq 1-\frac{\alpha}{2}$$

סתירה. לכן

$$m\left(A^c\cap[0,1]\right) = 0 \Rightarrow m\left(A\right) = 1$$

■

תרגיל

תהי $f\in L^{1}\left(\mathbb{R}\right)$ הוכיחו שקיימת סדרה $\left\{ f_{n}\right\} \subset C\left(\mathbb{R}\right)$ כל ש: $f\left(x\right)\overset{\text{a.e.}}{\longrightarrow}f_{n}\left(x\right)$ (כלומר הפו' הרציפות צפופות ב-L^{1}). **הוכחה:** נגדיר

$$f_{n}\left(x_{0}\right):=n\int_{x_{0}-\frac{1}{2^{n}}}^{x_{0}+\frac{1}{2^{n}}}fdm$$

לפי משפט הצפיפות של לבג $f\overset{\text{a.e.}}{\longrightarrow}f_{n}$. נראה ש$f_{n}$ רציפות:

$$\begin{aligned}f_{n}\left(x\right)-f_{n}\left(x_{0}\right) & = & n\left(\int_{x-\frac{1}{2^{n}}}^{x+\frac{1}{2^{n}}}f\left(t\right)dt-\int_{x_{0}-\frac{1}{2^{n}}}^{x_{0}+\frac{1}{2^{n}}}f\left(t\right)dt\right)\\
 & = & n\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{B\left(x,\frac{1}{2^{n}}\right)}\left(t\right)dt-\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{B\left(x_{0},\frac{1}{2^{n}}\right)}\left(t\right)dt\right)\\
 & \underset{x\to x_{0}}{\longrightarrow} & 0
\end{aligned}$$

(לפי משפט התכנסות הנשלטת עם מז'ורנטה $\left|f\right|$). ■

תרגיל

תהי $\mathbb{R}\supseteq A$ מדידה, הראו שלכמעט כל $x\in A$:

$$d\left(x+y,A\right)=o\left(\left|y\right|\right)_{\left|y\right|\to0}$$

הוכחה: $\left[f\left(y\right)=o\left(g\left(y\right)\right)_{y\to0}\Leftrightarrow\frac{f(y)}{g(y)}\underset{y\to0}{\longrightarrow}0\right]$ מספיק להראות לכל נק' צפיפות. יהי $\epsilon>0$, נראה שקיים $\delta>0$ כך שלכל $y<\delta$ מתקיים $\frac{d(x+y,A)}{\left|y\right|}<\epsilon$.תהי $x\in A$ נק' צפיפות:

$$\frac{m\left(A\cap\left[x-\epsilon,x+\epsilon\right]\right)}{2\epsilon}\overset{\epsilon\to0}{\longrightarrow}1$$

לכן, עבור $\alpha=1-\frac{\epsilon}{2}$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $\left|y\right|<\delta$:

$$\frac{m\left(A\cap\left[x-y,x+y\right]\right)}{2\left|y\right|}>\alpha$$

נניח בשלילה

$$\frac{\inf\left\{ \left|x+y-a\right|:a\in A\right\} }{\left|y\right|}=\frac{d\left(x+y,A\right)}{\left|y\right|}\geq\epsilon$$

(נניח לה"כ $y>0$) נקבל:

$$A\cap\left(x+y-\epsilon y,x+y\right)=\emptyset$$

(אחרת יש נקודה ב־A שהמרחק בינה לבין $x+y$ קטן מ־ϵyבסתירה להנחת השלילה).

$$\begin{aligned}\alpha=1-\frac{\epsilon}{2} &< \frac{m\left(A\cap(x-y,x+y]\right)}{2y}\\ &\leq \frac{m\left([x-y,x+y-\epsilon y]\right)}{2y}\\ &= \frac{2y-\epsilon y}{2y}=1-\frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

סתירה ולכן $\epsilon > \frac{f(x+y,A)}{|y|}$. ■

תרגיל:

מצאו $A\subseteq[0,1]$ שמקיימת:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \frac{m\left(A\cap[0,2^{-n}]\right)}{2^{-n}}=\frac{1}{2}$$

הוכחה: הרעיון כדלהלן: נרצה לבנות A כך ש־$\frac{1}{2}A=A\cap\left[0,\frac{1}{2}\right]$, ובאופן כללי $\forall n$: $2^{-n}A=A\cap[0,2^{-n}]$ וכן $m(A)=\frac{1}{2}$
נגדיר

$$A=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left[3\cdot2^{-n-2},2^{-n}\right]$$

אז A מקיימת:

$$2^{-n}A=A\cap\left[0,2^{-n}\right]$$

והמידה:

$$m(A)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$$

■

פונקציות בעלות השתנות חסומה

תזכורת:

f בעלת השתנות חסומה בקטע $I=[a,b]$ אם:

$$\operatorname{Var}_I(f):=\sup_T\sum\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|<\infty$$

כאשר $T_{[a,b]}:a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$

הערה 13.4 פו' בעלת השתנות חסומה אס"ם היא מהווה הפרש של שתי פו' מונוטוניות ולכן בעלת לכל היותר מס' בן מניה של נק' אי רציפות והן מסוג ראשון (קפיצה). לכן הנגזרת קיימת כב"מ.

תרגיל

הראו כי ההשתנות של בפו'

$$f(x) := \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

אינה חסומה ב$I = [0,1]$. **הוכחה:** נבחר את החלוקה הבאה: לכל n א"ז (אי זוגי):

$$T_{n+1} : 0 < \frac{2}{\pi(2n-1)} < \frac{2}{\pi(2n-3)} < \ldots < \frac{2}{\pi} < 1$$

ז"א:

$$x_k = \begin{cases} 0 & k=0 \\ \frac{2}{\pi(2n-2k+1)} = \frac{1}{\pi(n-k)+\frac{\pi}{2}} & k=1,...,n \\ 1 & k=n+1 \end{cases}$$

כעת:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{x_k}\right)_{k=1,\ldots,n} &= \sin\left((n-k)\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos((n-k)\pi) \\ &= (-1)^{n-k} = \overbrace{=}^{\text{n is odd}} (-1)^{1+k} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ \text{k=1,..,n}\, |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= |x_k + x_{k-1}| \geq 2|x_k| \end{aligned}$$

כעת:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_I f \overbrace{\geq}^{\sup} & \sum_{k=1}^{n+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ \geq & \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(n-k+\frac{1}{2}\right)} \\ = & \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \end{aligned}$$

■

תרגיל המשך

עבור אלו ערכי α הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

בעלת השתנות חסומה ב$I = [0,1]$?

תזכורת:

אם $f\in C^{1}\left(I\right)$ אז

$$\mathrm{Var}_{I}f=\int_{I}\left|f'\left(x\right)\right|dx$$

הוכחה: עבור חלוקה כלשהי $x_{0}<...<x_{n}$ לפי משפט הערך הממוצע, לכל $1\leq k\leq n$ קיים $x_{k-1}\leq t_{k}\leq x_{k}$ כך ש:

$$\begin{aligned}\frac{f\left(x_{k}\right)-f\left(x_{k-1}\right)}{x_{k}-x_{k-1}} & = & f'\left(t_{k}\right)\\ \left|f\left(x_{k}\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right| & = & \left|f'\left(t_{k}\right)\right|\left|x_{k}-x_{k-1}\right|\end{aligned}$$

נתבונן בסכום ההפרשים ונקבל:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_{k}\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|f'\left(t_{k}\right)\right|\left|x_{k}-x_{k-1}\right|$$

כאשר נשאיף $n\to\infty$ בשני האגפים נקבל:

$$\mathrm{Var}_{I}\left(f\right)=\int_{I}\left|f'\left(t\right)\right|dt$$

כיון שזה נכון לכל חלוקה של הקטע. ■

הערה: מספיק לדרוש $f\in AC$.

הוכחה לתרגיל:

בכל קטע $\left[\epsilon,1\right]$ $\left(\epsilon>0\right)$ נגזור:

$$f'\left(x\right)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

עבור $\alpha>2$ נקבל $f'\left(x\right)$ חסומה ב־I ולכן

$$\mathrm{Var}_{I}f=\int_{I}\left|f'\left(t\right)\right|dt<\infty$$

לכל $1\leq\alpha\leq2$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\left[\epsilon,1\right]} & \leq & \int_{\epsilon}^{1}\left|\alpha x^{\alpha-1}\right|dx+\int_{\epsilon}^{1}\left|x^{\alpha-2}\right|dx\\ & = & x^{\alpha}|_{\epsilon}^{1}+\left.\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right|_{\epsilon}^{1}\\ & = & 1-\epsilon^{\alpha}+\frac{1-\epsilon^{\alpha-1}}{\alpha-1}<\infty\\ \mathrm{Var}_{I}f & = & \lim_{\epsilon\to0}\mathrm{Var}_{\left[\epsilon,1\right]}f<\infty\end{aligned}$$

כיוון ש$\mathrm{Var}_I f$ פונ' רציפה ביחס לקבוצה עבור f (וודאו).
כש$1 \leq \alpha$ נבחר חלוקה בדומה לתרגיל הקודם: לכל n אי זוגי:

$$x_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{1}{\pi(n-k)+\frac{\pi}{2}} & k = 1, ..., n \\ 1 & k = n+1 \end{cases}$$

וכמו שם נקבל:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_I\left(x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) &\geq 2\sum_{k=1}^{n} |x_{k-1}|^\alpha \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(n-m+\frac{1}{2}\right)^\alpha} \end{aligned}$$

אבל

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(n-k+\frac{1}{2}\right)^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+k\right)^\alpha} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$