

**תזכורת**

1. יהי  $T: V \rightarrow W$  אופרטור לינארי. אזי לכל  $v \in V \wedge w \in W$  מתקיים:  
 $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$
2. יהי  $T: V \rightarrow V$  אופרטור נורמלי. יהי  $\lambda \in \mathbb{F}$  עייע של  $T$ . יהי  $v \in V$  וייע המתאים ל- $\lambda$ .  
 אזי,  $T^*(v) = \bar{\lambda} \cdot v$

**מסקנה**

אם  $T: V \rightarrow V$  אופרטור נורמלי,  $\lambda, \mu$  ערכים עצמיים שונים של  $T$ , ווקטור עצמי של  $T$  המתאים לערך העצמי  $\lambda$ ,  $w$  ווקטור עצמי של  $T$  המתאים לערך העצמי  $\mu$ , אז:  $v \perp w$ .

**הוכחה**

$$\lambda \cdot \langle v, w \rangle = \langle \lambda \cdot v, w \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, w \rangle \stackrel{\text{תכונה של } T^*}{=} \langle v, T^*(w) \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, w \rangle \stackrel{\text{משפט קודם}}{=} \langle v, \bar{\mu} \cdot w \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, w \rangle = \bar{\mu} \cdot \langle v, w \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, w \rangle = \mu \cdot \langle v, w \rangle$$

$\lambda \neq \mu$ , לכן  $\langle v, w \rangle = 0$ , אזי:  $v \perp w$ .

■

**מסקנה**

תכונה זו מתקיימת בפרט לאופרטור אוניטרי ולאופרטור צמוד לעצמו.

**מסקנה**

אם  $T: V \rightarrow V$  אופרטור צמוד לעצמו, אזי כל הערכים העצמיים של  $T$  ממשיים.

**הוכחה**

יהי  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$ , ויהי  $v$  ווקטור עצמי של  $T$  המתאים לערך העצמי  $\lambda$ .

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle \lambda \cdot v, v \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle v, T^*(v) \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle v, T(v) \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle v, \lambda \cdot v \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle v, v \rangle$$

$v \neq 0$  (שכן  $v$  ווקטור עצמי), לכן:  $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  (תכונות של נורמה), לכן:  $\lambda = \bar{\lambda}$ ,

לכן:  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



### מסקנה

אם  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , ואם  $T$  אופרטור סימטרי (אופרטור צמוד לעצמו), אזי  $p_T(x)$  מתפרק לגורמים לינאריים.

(מעל  $\mathbb{C}$ ) כל פולינום מתפרק לגורמים לינאריים. האופרטור סימטרי, לכן כל הערכים העצמיים שלו ממשיים, והערכים העצמיים הם שורשי הפולינום האופייני).

### מסקנה

אם  $A$  מטריצה ממשית סימטרית, אזי  $p_A(x)$  מתפרק לגורמים לינאריים.

### מסקנה

אם  $T: V \rightarrow V$  אופרטור אוניטרי, ואם  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$ , אזי  $|\lambda| = 1$ .

### הוכחה

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle \lambda \cdot v, v \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle v, T^*(v) \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle v, T^{-1}(v) \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle v, \frac{1}{\lambda} \cdot v \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \overline{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \cdot \langle v, v \rangle$$

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \langle v, v \rangle$$

$v \neq 0$  (שכן  $v$  ווקטור עצמי), לכן:  $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  (תכונות של נורמה), לכן:  $\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}}$ , מכאן:

$$\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1 \quad \text{לכן: } |\lambda| = 1.$$

■

### מסקנה

אם  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , ואם  $T$  אופרטור אורתוגונלי (אופרטור אוניטרי), אזי  $\lambda = \pm 1$ .

(נובע ישירות מהגדרת המודול).

## שילוש ולכסון אוניטרי

### הערה

אם  $T: V \rightarrow V$  אופרטור לינארי ניתן לשילוש, אזי  $p_T(x)$  מתפרק לגורמים לינאריים (תנאי הכרחי לשילוש ולכסון).

### משפט

כל אופרטור  $T: V \rightarrow V$ , כך ש-  $p_T(x)$  מתפרק לגורמים לינאריים, ניתן לשילוש אוניטרי, ז"א, קיים בסיס אורתונורמלי  $B$  של  $V$  כך ש-  $A = [T]_B$  משולשת עליונה.

### הוכחה

עפ"י קריטריון שילוש,  $T$  ניתן לשילוש. לכן קיים בסיס  $B_0$  של  $V$ , כך ש-  $A_0 = [T]_{B_0}$  משולשת עליונה.

נפעיל את תהליך גראם שמידט על הבסיס  $B_0$  לקבלת בסיס אורתונורמלי  $B$  של  $V$ .

נסמן ב-  $C$  את מטריצת המעבר מהבסיס  $B_0$  לבסיס אורתונורמלי  $B'$  (המתקבל בתום החלק העיקרי של תהליך גראם שמידט).  $C$  מטריצה מהצורה:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נסמן ב-  $C'$  את מטריצת המעבר מהבסיס  $B'$  לבסיס  $B$ .

$$\text{נרמול} \begin{cases} \widetilde{v}_1^0 = \frac{1}{\|\widetilde{v}_1\|} \cdot \widetilde{v}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{v}_n^0 = \frac{1}{\|\widetilde{v}_n\|} \cdot \widetilde{v}_n \end{cases}$$

לכן:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\widetilde{v}_1\|} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|\widetilde{v}_2\|} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\|\widetilde{v}_{n-1}\|} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\|\widetilde{v}_n\|} \end{pmatrix}$$

לכן, מטריצת המעבר  $C_0$  מ- $B_0$  ל- $B$ , שווה למכפלה  $C \cdot C'$ .

**נימוק:**  $C_0 = [T]_B^{B_0} = [T]_B^{B'} \cdot [T]_B^{B_0} = C \cdot C'$ , לכן היא מטריצה משולשת עליונה (כמכפלה של מטריצות משולשות עליונות).

לכן, ל- $A = [T]_B$  מתקיים:  $A = \overset{\text{משולשת}}{\widetilde{C}_0} \cdot \overset{\text{משולשת}}{\widetilde{A}_0} \cdot \overset{\text{משולשת}}{\widetilde{C}_0^{-1}}$ .

**נימוק:**  $A = [T]_B = [T]_B^{B_0} \cdot [T]_{B_0}^{B_0} \cdot [T]_{B_0}^B = \overset{\text{משולשת}}{\widetilde{C}_0} \cdot \overset{\text{משולשת}}{\widetilde{A}_0} \cdot \overset{\text{משולשת}}{\widetilde{C}_0^{-1}}$ .

לכן  $A$  משולשת עליונה, כמכפלה של מטריצות משולשות עליונות.

■

### משפט (שילוש אוניטרי למטריצות)

תהי  $A_0$  מטריצה ריבועית כך ש- $p_{A_0}(x)$  מתפרק לגורמים לינאריים. אזי קיימת מטריצה אוניטרית  $P$  כך ש- $A = P^{-1} \cdot A_0 \cdot P$  משולשת עליונה.

### הוכחה

נבחר ב- $V = \mathbb{F}^n$  בסיס אורתונורמלי  $B_0$ . נגדיר  $T: V \rightarrow V$  ע"י  $T(x) = A_0 \cdot x$ . אזי:  $A_0 = [T]_{B_0}$ .

**נימוק:**  $C_i([T]_{B_0}) = [T(v_i)]_{B_0} = [A_0 \cdot v_i]_{B_0} = C_i(A_0)$ .

לפי המשפט הקודם,  $T$  ניתן לשילוש אוניטרי, ז"א, קיים בסיס אורתונורמלי  $B$  של  $V$  כך ש- $A = [T]_B$  משולשת עליונה.

לכן:  $A = P^{-1} \cdot A_0 \cdot P$ , כש  $P$  היא מטריצת המעבר מ  $B_0$  ל  $B$ . משום ש  $B, B_0$  בסיסים אורתונורמליים, נקבל ש  $P$  מטריצה אוניטרית (לפי משפט מהרצאה 17).

■

**למה**

אם  $A$  מטריצה משולשת ונורמלית, אז  $A$  אלכסונית.

**הוכחה**

נתון:  $A \cdot A^* = A^* \cdot A$  – משולשת.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \overline{A^t} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \overline{a_{23}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{n-1,n}} & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

נחשב:

$$(A \cdot A^*)_{11} = a_{11} \cdot \overline{a_{11}} + a_{12} \cdot \overline{a_{12}} + \cdots + a_{1n} \cdot \overline{a_{1n}} = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2$$

$$(A^* \cdot A)_{11} = \overline{a_{11}} \cdot a_{11} = |a_{11}|^2$$

מהשוויון  $A \cdot A^* = A^* \cdot A$  נקבל:  $|a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2 = 0$ , לכן:  $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$ .

לכן:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \wedge A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \overline{a_{22}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \overline{a_{23}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{n-1,n}} & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

נחשב:

$$(A \cdot A^*)_{22} = a_{22} \cdot \overline{a_{22}} + a_{23} \cdot \overline{a_{23}} + \cdots + a_{2n} \cdot \overline{a_{2n}} = |a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2$$

$$(A^* \cdot A)_{22} = \overline{a_{22}} \cdot a_{22} = |a_{22}|^2$$

מהשוויון  $A \cdot A^* = A^* \cdot A$  נקבל:  $|a_{23}|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2 = 0$ , לכן:  $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$ .

לכן:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & a_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \wedge A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \overline{a_{22}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \overline{a_{n-1,n}} & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

נמשיך באינדוקציה ונקבל:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

לכן,  $A$  אלכסונית, כדרוש.

■

### משפט (לכסון אוניטרי לאופרטור נורמלי)

יהי  $T: V \rightarrow V$  אופרטור נורמלי כך ש-  $p_T(x)$  מתפרק לגורמים לינאריים. אזי  $T$  ניתן ללכסון אוניטרי, ז"א, קיים בסיס אורתונורמלי  $B$  של  $V$ , כך ש-  $A = [T]_B$  היא מטריצה אלכסונית.

### הוכחה

לפי המשפט הקודם על שילוש אוניטרי, קיים בסיס אורתונורמלי  $B$  של  $V$ , כך ש-  $A = [T]_B$  היא מטריצה משולשת עליונה.

מצד שני, משום ש-  $T$  נורמלי ו-  $B$  אורתונורמלי,  $A$  היא מטריצה נורמלית (לפי משפט מהרצאה 21), ולפי הלמה הקודמת –  $A$  מטריצה אלכסונית.

■