טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 6

שאלה 1

יהיו $x \neq a \in D^2$. מצאו את $\pi_1(D^2\setminus\{x\}, a)$, כאשר:

א. $x \in \partial D^2$.

פתרון:

אם $x\in\partial D^2$, אזי $D^2\setminus\{x\}$ קבוצה קמורה ב-$\mathbb{R}^2$, ולכן זהו מרחב כוויץ ובפרט פשוט קשר; לכן, $\pi_1(D^2\setminus\{x\},a)=\{1\}$.

ב. $x\in \text{int}\, D^2$.

פתרון:

אם $x\in \text{int}\, D^2$, נראה ש-$S^1 = \partial D^2$ נסג עיוותי של $D^2\setminus\{x\}$.

נוכל להניח $x=0$ (כי $D^2\setminus\{x\}\cong D^2\setminus\{0\}$), ונגדיר $H: D^2\setminus\{0\}\times I \to D^2\setminus\{0\}$ ע"י $H(y,t):=(1-t)y+t\cdot\frac{y}{\|y\|}$.

H רציפה, וכן לכל $y\in D^2\setminus\{0\}$, $H(y,1)=\frac{y}{\|y\|}\in S^1$; $H(y,0)=y$.

בנוסף, לכל $y\in S^1$ ולכל $t\in I$,

$$H(y,t)=(1-t)y+t\cdot\underbrace{\frac{y}{\|y\|=1}}_{y}=y-ty+ty=y$$

מסך הכל, S^1 נסג עיוותי של $D^2\setminus\{0\}$, ולכן

$$\pi_1(D^2\setminus\{x\},a)\cong\pi_1(D^2\setminus\{0\},\underset{\neq 0}{b})\cong\pi_1(S^1,\tfrac{b}{\|b\|})\cong\mathbb{Z}$$

ולסיכום $\pi_1(D^2\setminus\{x\})\cong\mathbb{Z}$.

שאלה 2

הראה שאם $h: D^2 \longrightarrow D^2$ הומיאומורפיזם, אזי $h(\partial D^2) = \partial D^2$ ו-$h(\operatorname{int} D^2) = \operatorname{int} D^2$.

הוכחה:

תהי $x \in \partial D^2$. אזי $h|_{D^2 \setminus \{x\}} : D^2 \setminus \{x\} \longrightarrow D^2 \setminus \{h(x)\}$ גם הומיאומורפיזם,

ובפרט $\underset{\{1\}}{\underset{\|}{\pi_1(D^2 \setminus \{x\}, a)}} \cong \pi_1(D^2 \setminus \{h(x)\}, a)$ עבור $a \in D^2$, $a \neq x, h(x)$.

אם בשלילה $h(x) \in \operatorname{int} D^2$, נקבל $\{1\} \cong \pi_1(D^2 \setminus \{h(x)\}, a) \cong \mathbb{Z}$, בסתירה (לא אל, עצמו.).

לכן $h(x) \in \partial D^2$ לכל $x \in \partial D^2$, ומכאן $h(\partial D^2) \subseteq \partial D^2$.

אבל גם $h^{-1}: D^2 \longrightarrow D^2$ הומיאומורפיזם, ולכן $h^{-1}(\partial D^2) \subseteq \partial D^2$,

כלומר $\partial D^2 \subseteq h(\partial D^2)$. לכן $h(\partial D^2) = \partial D^2$.

אבל h חד-חד ערכית ועל, ומכאן $h(D^2 \setminus \partial D^2) = D^2 \setminus \partial D^2$

$$\Downarrow$$

$$h(\operatorname{int} D^2) = \operatorname{int} D^2$$

שאלה 4

א. הראה שעבור $n\geq 2$, S^n הוא פשוט קשר.

<u>הוכחה:</u>

נגדיר את הקבוצות הפתוחות הבאות:

$$U=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n \mid x_{n+1}>-\tfrac{1}{10}\}$$

$$V=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n \mid x_{n+1}<\tfrac{1}{10}\}$$

ברור ש- $X=U\cup V$.

לפי ההטלה הסטריאוגרפית, U ו-V הומיאומורפיים לכדור פתוח ב-$\mathbb{R}^n$,

ולכן הם פשוטי קשר.

נותר להסתכל על החיתוך $U\cap V=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n \mid -\tfrac{1}{10}<x_{n+1}<\tfrac{1}{10}\}$.

$U\cap V\neq\phi$, וגם $U\cap V\cong S^{n-1}\times(0,1)$ גליל, ולכן קשיר מסילתית. 

בסך הכל, U ו-V מקיימות את התנאים של שאלה 3, ולכן

S^n פשוט קשר עבור $n\geq 2$.

ב. היכן הוכחה זו נכשלת אם ננסה ליישם אותה ל-S^1?

<u>פתרון:</u>

אם נגדיר U ו-V כנ"ל, הבעיה תהיה שהחיתוך שלהן

$$U\cap V=\{(x,y) \mid -\tfrac{1}{10}<y<\tfrac{1}{10}\}$$ 

אינו קשיר ובפרט אינו קשיר מסילתית.