תרגול 4

הגדרה:

תבנית דיפרנציאלית ω נקראת מדויקת אם קיימת פונקציה F כך ש $\omega = df$, כלומר שהיא דיפרנציאל של איזושהי פונקציה.

דוגמא: התבנית $\omega(x,y,z) = \left(3x^2y^2 + \cos(z)\right)dx + 2yx^3dy - x\sin zdz$ הינה מדוייקת שכן היא הדיפרנציאל של הפונקציה $F(x,y,z) = x^3y^2 + \cos(z)x$.

הגדרה:

תבנית דיפרנציאלית ω נקראת סגורה אם $d\omega = 0$.

דוגמא: התבנית $\omega(x,y,z) = 2xdx + zdy + ydz$ הינה סגורה שכן $d\omega(x,y,z) = (2dx)dx + (dz)dy + (dy)dz = 0$.

תבנית דיפרנציאלית $\omega(x) = \omega_1(x)dx_1 + ... + \omega_n(x)dx_n$ שהיא c^1 ומקיימת את התנאי $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$ $i, j = 1,..n$ נקראת סגורה

משפט:

כל תבנית מדויקת היא סגורה.

דוגמא: $\omega(x,y,z) = 2xdx + zdy + ydz$ הינה מדוייקת שכן היא הדיפרנציאל של $F(x,y,z) = x^2 + yz$. וראינו כי $d\omega = 0$.

משפט:

כל תבנית -1 אשר מוגדרת בכל $\Re^2$ היא מדויקת

אבל

התבנית ה1-דיפרנציאלית $\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ היא סגורה ב$\Re^2 / \{0\}$ אבל היא לא מדויקת,

כלומר לא קיימת פונקציה f מ $\Re^2 / \{0\}$ ל $\Re^2$ כך שמתקיים $\omega = df$(נראה זאת בהמשך, אם לא ראיתם בהרצאה)

כלומר השאלה האם תבנית -1 ω בU היא מדויקת תלויה בצורה הגאומטרית של U.

<u>הגדרה:</u>הי $x_0 \in D$ כך שהקטע בין x_0 ל- $x \in D$ נמצא כולו בD לכל $x \in D$ אזי D נקרא תחום כוכבי

<u>על פי הלמה של פונקרה :</u>(POINCARE LEMMA) כל תבנית סגורה אשר מוגדרת בתחום כוכבי

(SHAPED-STAR) היא מדויקת.

<u>הגדרה:</u>

שדה וקטורי נקרא משמר אם קיימת פונקציה ממשית $F : D \to R$ (Fמ D ל R)כך ש $\nabla F = f$

(הגרדיאנט של F שווה ל f) אזי הפונקציה F נקראת פוטנציאל של f בD

<u>דוגמא</u>

נתון $f = (y^2, 2xy - 3zy^2, -y^3 + 2z)$ ב R^3 מצא את הפוטנציאל של f

כלומר עלינו למצוא $\Phi : R^3 \to R$ כך ש $\nabla\Phi = f$

תחילה נבדוק את תנאי הסגירות(להסביר שמתקיים תנאי הסגירות לפי נגזרות חלקיות)

וגם מתקיים ש R^3 הוא תחום כוכבי, כעת נמצא את פונקצית הפוטנציאל Φ

$$\Phi_x = y^2$$
$$\Phi_y = 2xy - 3zy^2$$
$$\Phi_z = -y^3 + 2z$$

נעשה אינטגרציה לפי x ונקבל

$\Phi = y^2x + h1(y,z)$ נגזור לפי y ונקבל

$2yx + \frac{\partial h1(y,z)}{\partial y} = 2xy - 3zy^2$ כלומר $\frac{\partial h1(y,z)}{\partial y} = -3zy^2$ נבצע אינטגרציה לפי y ונקבל

$h1(y,z) = -zy^3 + h2(z)$ ולכן $\Phi = xy^2 - zy^3 + h2(z)$

נגזור לפי z ונקבל $\Phi_z = -y^3 + h_2'(z) = -y^3 + 2z$ ולכן

$h_2'(z) = 2z$ נבצע אינטגרציה לפי z ונקבל

$$h_2(z) = z^2 + c$$

ולכן פונקצית הפוטנציאל היא $\Phi = xy^2 - zy^3 + z^2 + C$.