תרגיל בית 3 – סיגמא אלגברות ומידות כלליות

1. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x -ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n .

א. הראו כי B הינה מדידה לבג.(רמז: הציגו את B כך $B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$)

ב. אם $m(A_n)>\delta>0$ לכל n , הראו כי $m(B)>\delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ אז $m(B)=0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$ אבל $m(B)=0$.

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את B בצורה הבאה:

$$B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה x -ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה $\{A_n\}$. ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא- אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$ נקבל שהסדרה $\{E_k\}$ הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה B הינה מדידה שכחיתוך של מדידות.

ב. נשים לב כי $E_1\supseteq E_2\supseteq\ldots$ וגם מתקיים כי $m(E_1)\le 1$ שכן $E_1\subseteq[0,1]$. ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)$$
$$\ge\lim_{k\to\infty}m(A_k)\ge\delta$$

ג. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ נובע כי $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}m(A_n)=0$. ברור כי $m(E_k)\le\sum_{n=k}^{\infty}m(A_n)$

שוב,

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n\right)$$
$$\le\lim_{k\to\infty}\sum_{n=k}^{\infty}m(A_n)=0$$

ניקח את $A_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$. קל לראות כי $m(A_n)=\frac{1}{n}$ וכי $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$. מצד שני $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n=A_k$ ולכן

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=0$$

2. יהיו $\mathfrak{A}_1$ ו $\mathfrak{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathfrak{A}_1)=\sigma(\mathfrak{A}_2)$.

פתרון: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי

$\sigma(\mathfrak{A}_2)\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$: מכיוון ש $\mathfrak{A}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ נובע כי הסיגמא אלגברה המינימלית שמכילה את $\mathfrak{A}_2$ מוכלת ב $\sigma(\mathfrak{A}_1)$, כלומר - $\sigma(\mathfrak{A}_2)\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$.

$\sigma(\mathfrak{A}_2)\supseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$: נובע מכך ש $\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_2$.

3. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A\in\sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathfrak{D}\subseteq\mathcal{E}$ כך ש $A\in\sigma(\mathfrak{D})$.

פתרון:

א. נסמן ב S קבוצת כל הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את התכונה ונראה כי S הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח $E\in\mathcal{E}$, ברור כי $X\in\sigma(E)$ ומכאן ש $X\in S$.

ii. אם $A\in S$ אזי נובע כי קיימת סדרה $\{E_n\}$ כך ש $E_n\in\mathcal{E}$ וגם $A\in\sigma(E_n,n\in\mathbb{N})$ מכאן ש $A^c\in\sigma(E_n,n\in\mathbb{N})$ ולכן $A^c\in S$.

iii. תהי $A_n \in S$. נובע כי לכל n קיימת סדרה $\left\{E_n^k\right\}$ של קבוצות כך ש $E_k^n \in \mathcal{E}$ וגם $A_n \in \sigma\left(E_k^n, k \in \mathbb{N}\right)$. קל לראות כי אז $\left\{E_k^n\right\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ הינה בת מנייה וכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma\left(E_k^n, n,k \in \mathbb{N}\right)$ ולכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in S$.

מכאן ש S הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל $E \in \mathcal{E}$ מתקיים כי $E \in \sigma\left(E\right)$ ולכן $E \in S$. מכאן נובע כי $\sigma\left(E\right) \subseteq S$ וסיימנו.

4. נניח ו $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ הינן מידות על מרחב מדיד $\left(X, S\right)$ ו $\mu_n\left(A\right)\uparrow$ לכל $A \in S$ וגם $\mu\left(A\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(A\right)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.
5. נניח ו $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ הינן מידות על מרחב מדיד $\left(X, S\right)$ ו $\mu_n\left(A\right)\uparrow$ לכל $A \in S$ אזי $\mu\left(A\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(A\right)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

פתרון: ברור כי $\mu\left(A\right) \ge 0$ לכל $A \in S$ וכי $\mu\left(\varnothing\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\varnothing\right) = 0$. נראה כי גם התכונה השלישית מתקיימת.

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j\to\infty} \mu_j\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j\left(A_n\right)$$

נסמן את הסכומים החלקיים $c_{ij} = \sum_{n=1}^{i} \mu_j\left(A_n\right)$. מתקיים

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j\left(A_n\right) = \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} c_{ij} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\in\mathbb{N}} c_{ij}$$

$$= \sup_{i,j\in\mathbb{N}} c_{ij} = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{j\in\mathbb{N}} c_{ij} = \lim_{j\to\infty} \lim_{i\to\infty} c_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{j\to\infty} \mu_j\left(A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

מש"ל.