תרגיל בית 3

1. תנו דוגמא לפונקציה f שאינה מדידה לבג אבל $|f|$ כן מדידה לבג.

פתרון: ניקח את $f=1_E-1_{E^c}$ כאשר E הינה הקבוצה הלא מדידה לבג שראינו מתחילת הקורס. ברור כי f איננה מדידה שכן $f^{-1}(1)=E$ וזו קבוצה לא מדידה לבג. כעת נשים לב כי $|f|=1$ זו כמובן פונקצית אינדיקטור שניתן לרשום $f=1_{\mathbb{R}}$ וזו כמובן קבוצה מדידה.

2. תהי $\{A_i\}$ סדרה של קבוצות זרות במרחב מדיד (X,S).

i. יהיו $\{g_i\}_{i\geq 1}$ סדרה של פונקציות על X המדידות S. הראו כי $\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}g_i$ מתכנסת ומדידה S.

ii. נניח כי $\bigcup_n A_n = X$. תהי $\mathscr{G}=\sigma(\{A_i : i\geq 1\})$ ופונקציה $h:X\to\mathbb{R}$. הראו כי h מדידה אמ"מ h קבועה על כל A_i.

פתרון:

i. נסמן ב $G_M(x)=\sum_{i=1}^{M}1_{A_i}(x)g_i(x)$, זוהי סדרה של פונקציות מדידות. נסמן גם $G=\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}g_i$, קל לראות כי G_M מתכנסת ל G. מכאן ש G מדידה כגבול של פונקציות מדידות.

ii. $\Rightarrow$: אם h קבועה על כל A_i ב c_i, הערך של h על A_i אזי ברור כי $h=\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}(x)c_i$ הינה מדידה עפ"י הסעיף הראשון.

$\Leftarrow$: לא קשה להראות(בידקו תכונות) כי מכיוון ש A_i זרות ואיחודן הוא כל X אזי משפחת הקבוצות $\mathrm{C}=\{E \mid E=\bigcup_{i\in J}A_i, J\subseteq\mathbb{N}\}$ הינה סיגמא אלגברה המכילה את A_i ולכן $\mathscr{G}\subseteq C$. אם h איננה קבועה על איזשהו A_i אזי היא מקבלת לפחות 2 ערכים שונים על A_i, נניח שאחד מהם הוא y, אזי $D=h^{-1}(y)\cap A_i\subset A_i$ (מוכל ממש). מכיוון ש D מוכלת ממש ב A_i נובע כי $D\notin C$ ומכאן ש $h^{-1}(y)$ איננה מדידה $\mathscr{G}$.

3. יהי מרחב מדיד (X,S) ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות f_1, f_2 ו f_3 ($f_i : X\to\mathbb{R}$ ($i=1,2,3$)). התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1(x)t^2+f_2(x)t+f_3(x)=0$$

זוהי משוואה ריבועית ב t לכל $x\in X$.

הראו כי $A\equiv\{x\in X: the\ equation\ has\ two\ distinct\ roots\}$ הינה מדידה $\mathcal{S}$.

פתרון: נשים לב כי $A=\{x\in X: f_2{}^2-4f_1f_3>0\}$. ראינו כבר כי פונקציות מדידות סגורות תחת כפל וחיבור ולכן $f_2{}^2-4f_1f$ הינה פונקציה מדידה $\mathcal{S}$ ומכאן ש $f_2{}^2-4f_1f>0$ הינה קבוצה מדידה $\mathcal{S}$.

4. יהי מרחב מדיד (X,S) ויהיו f,g פונקציות מדידות $\mathcal{S}$ המקבלות ערכים ב $\mathbb{R}$. הראו כי הפונקציה $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}1_{(g(x)\neq 0)}$ הינה מדידה $\mathcal{S}$.

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha<0$, אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$h^{-1}\left((-\infty,\alpha)\right)=\{x\in X\mid \frac{f(x)}{g(x)}<\alpha\}$$
$$=\{x\in X\mid f(x)<g(x)\alpha\}\cap\{g(x)>0\}\bigcup\{x\in X\mid f(x)>g(x)\alpha\}\cap\{g(x)<0\}$$
$$=\{x\in X\mid f(x)-g(x)\alpha<0\}\cap\{g(x)>0\}\bigcup\{x\in X\mid f(x)-g(x)\alpha>0\}\cap\{g(x)<0\}$$

מכיוון שהפונקציה $f-\alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.

5. תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית. הראו שהקבוצה $\left\{x\in U: f \text{ is continuous at x}\right\}$ היא מטיפוס G_δ.

<u>פתרון:</u>

לכל $x\in U,\delta>0$ נגדיר את התנודה ("oscillation") של f בכדור $B(x,\delta)$ ע"י $\omega(x,\delta):=\sup\left\{\left|f(s)-f(t)\right|: s,t\in B(x,\delta)\right\}$, ונקודתית ע"י $\omega(x):=\inf\left\{\omega(x,\delta):\delta>0\right\}$.

אנו טוענים שלכל a ממשי הקבוצה $E_a=\left\{x:\omega(x)<a\right\}$ היא פתוחה.

<u>הוכחת הטענה:</u>

יהי $x_0\in E_a$, ישנה $\delta_0>0$ כך ש- $\omega(x_0,\delta_0)=\sup\left\{\left|f(s)-f(t)\right|: s,t\in B(x_0,\delta_0)\right\}<a$

(אחרת ה-inf של כולם לא היה קטן מ-a). לכן לכל $x\in B\left(x_0,\frac{\delta_0}{2}\right)$,

$$\omega\left(x,\frac{\delta_0}{2}\right)=\sup\left\{\left|f(s)-f(t)\right|:s,t\in B\left(x,\frac{\delta_0}{2}\right)\right\}\le\sup\left\{\left|f(s)-f(t)\right|:s,t\in B\left(x_0,\delta_0\right)\right\}<a$$

ומכאן כ-inf, $\omega(x)<a$ לכל $x\in B\left(x_0,\frac{\delta_0}{2}\right)$, והטענה הוכחה.

ניתן לראות כי f רציפה בנקודה x או"א $\omega(x)=0$ (אין תנודה בנקודה x) ולכן:

$\left\{x: f \text{ is continuous at x}\right\}=\left\{x:\omega(x)=0\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x:\omega(x)<\frac{1}{n}\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{\frac{1}{n}}$. הקבוצות $E_{\frac{1}{n}}$ כולן פתוחות, ולכן הקבוצה המדוברת היא באמת מטיפוס G_δ . מש"ל.