תרגיל 11

1. אוריאנטציה של בסיס סדור v_1, v_2, v_3 מוגדרת על ידי הסימן של הדטרמיננטה של $\left|\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}\right|$ (שמנו את איברי הבסיס בעמודות לפי הסדר שלהן). אופרטור שומר אוריאנטציה אם הוא שולח כל בסיס לבסיס עם אותה אוריאנטציה. הראה שאופרטור T שומר אוריאנטציה אם"ם $\det T > 0$.
2. יהי $V = F^{n\times n}$ ותהי מטריצה מסויימת נתונה $M \in V$. תהיי $f : V \times V \to F$ המוגדרת על ידי $f(A,B) = tr(A^t MB)$. הוכח ש f תבנית בילינארית
3. קבע אילו מין הפונקציות הבאות $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ הן תבניות בילנאריות
   a. $f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2x_3 + y_2x_3$
   b. $f(x,y) = x_1 + x_2 - y_3$
4. יהיו $T, S : V \to F$ העתקות לינאריות
   a. האם $f(v,u) = T(v)S(u)$ תבנית בילינארית?
   b. תהי $g : V \times V \to F$ תבנית בילינארית כלשהי. האם $f(v,u) = g(T(v), S(u))$ תבנית בילינארית?
5. תהיינה $f, g : V \times V \to F$ שתי תבניות בילינאריות, ויהי $B = \{v_1, ..., v_n\}$ בסיס ל V.
   a. הוכח כי התבניות שוות אם"ם $\forall i,j : f(v_i, v_j) = g(v_i, v_j)$ (כלומר $f = g$ אם"ם $[f]_B = [g]_B$)
   b. הוכח $[f+g]_B = [f]_B + [g]_B$
6. תבנית בילינארית $f : V \times V \to F$ נקראת מנוונת אם קיים $v \neq 0$ כך ש $\forall u : f(v,u) = 0$.
   a. הוכח ש $f : F^{n\times n} \times F^{n\times n} \to F$ המוגדרת ע"י $f(A,B) = tr(AB)$ אינה מנוונת.
   b. האם יכול להיות ש f כלשהי אינה מנוונת לפי הגדרה זו אך קיים $v \neq 0$ כך ש $\forall u : f(u,v) = 0$?
7. תהיי $f : V \times V \to F$ תבנית בילינארית כך ש $charF \neq 2$. הוכח ש f אנטי סימטרית אם"ם $\forall v \in V : f(v,v) = 0$ [רמז: הביטו ב $f(u+v, u+v)$]
8. תהיי f תבנית בילינארית כך ש $[f]_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
   a. מצא מטריצה הפיכה P כך ש $P^t[f]_S P$ אלכסונית
   b. מצא בסיס B כך ש $[f]_B$ אלכסונית
   c. יהיה $[x]_B = (x_1, ..., x_n)$. ותהי q התבנית הריבועית המתאימה ל f. מצא את $q(x)$