מרוכבים:

1. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^4=i-\sqrt{3}$

פתרון:

נעביר את האיבר המרוכב לצורה קוטבית. $w=i-\sqrt{3}$, $r=|w|=\sqrt{1+3}=2$, $\sin\theta=\frac{a}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

מכיוון שהוקטור נמצא ברביע השני, הזוית הינה $\theta=\frac{4\pi}{3}$ ולכן $w=2cis(\frac{4}{3}\pi)$. מתוך המחזוריות של הסינוס והקוסינוס אנחנו יודעים שלכל $k\in\mathbb{Z}$ מתקיים $w=2cis(\frac{4}{3}\pi+2\pi k)$.

נסמן $z=qcis(\alpha)$. לפי דה-מואבר מתקיים $w=z^4=q^4cis(4\alpha)$. לפי יחידות ההצגה הקוטבית מתקיים $q^4=2$ ולכן $q=\sqrt[4]{2}$. $4\alpha=\theta+2\pi k$ ולכן $\alpha=\frac{\theta}{4}+\frac{\pi k}{2}$. מתוך מחזוריות ומהסיבה שיש למשוואה ממעלה רביעית בדיוק 4 פתרונות, כל הפתרונות מתקבלים על ידי $k=0,1,2,3$. לסיכום פתרונות המשוואה הינם: $\sqrt[4]{2}cis\left(\frac{\pi}{3}\right),\sqrt[4]{2}cis\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right),\sqrt[4]{2}cis\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right),\sqrt[4]{2}cis\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)$

(אין צורך בכל ההסברים כאשר אתם פותרים את התרגיל, זה בשבילכם)

<u>שימו לב</u>: הנוסחא הכללית למציאת פתרונות המשוואה $z^n=rcis\theta$ היא $z=\sqrt[n]{r}cis\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$ עבור $k=0,1,2,...,n-1$

2. חשב את $\left(i-\sqrt{3}\right)^{10}$

פתרון:

נחשב את הצורה הקוטבית (עשינו את זה כבר בתרגיל קודם), לכן נותר לחשב את $\left(2cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)^{10}$.

לפי דה-מואבר זה שווה

$$2^{10}cis\left(\frac{40}{3}\pi\right)=2^{10}cis\left(\left(12+\frac{4}{3}\right)\pi\right)=2^{10}cis\left(6\cdot2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)=2^{10}cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)=2^9(i-\sqrt{3})$$

3. הוכח $cis\theta\cdot cis\alpha=cis(\theta+\alpha)$ (זוית מכפלת מספרים מרוכבים היא סכום זוית המספרים)

פתרון:

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\alpha+i\sin\alpha)&=\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha+i(\sin\theta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\theta)=\\&=\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)=cis(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

4. הוכח שלכל פולינום עם מקדמים ממשיים ממעלה אי זוגית יש לפחות שורש ממש אחד

פתרון:

יהי $f \in \mathbb{R}[x]$ פולינום ממעלה אי זוגית $f = a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_0$. מכיוון ש $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ נובע ש $f \in \mathbb{C}[x]$. לפי משפט יש לפולינום $2n-1$ שורשים מרוכבים.

נניח z שורש של הפולינום, כלומר $f(z) = 0$ כלומר $a_{2n-1}z^{2n-1} + ... + a_0 = 0$. נחשב את $f(\bar{z}) = a_{2n-1}\bar{z}^{2n-1} + ... + a_1\bar{z} + a_0$ מכיוון ש $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ ומכיוון שלכל מספר ממשי $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\bar{a} = a$ יוצא ש $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = \bar{0} = 0$.

לכן הראנו בעצם שלכל שורש מרוכב, גם הצמוד הינו שורש.

נניח בשלילה שלפולינום אין שורש ממשי. לכן יש לו רק שורשים מרוכבים ממש (החלק הדמיוני שלהם שונה מאפס). לכל שורש כזה יש צמוד שונה ממנו (מספר מרוכב ששווה לצמוד שלו הוא ממשי). לכן יש זוגות של שורשים – סה"כ מספר זוגי. בסתירה לכך שיש $2n-1$ שורשים.

<u>הערה</u>: התוכלו לפתור את השאלה הזו בדרך אחרת? (קשור לחדו"א ולגרף הפונקציה)