

מטריצות אלמנטריות

ראינו בתרגול 2 שלוש סוגי פעולות אלמנטריות. לכל פעולה אלמנטרית נתאים מטריצה הנקראת מטריצה אלמנטרית.
 ע"י הפעלת הפעולה על מטריצת היחידה $\rho(I)$ דוגמאות (ב $\mathbb{F}^{3 \times 3}$).

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_2 \leftrightarrow R_3 \text{ מתאים למטריצה} \\ & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 \rightarrow 5 \cdot R_1 \text{ מתאים למטריצה} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 - R_3 \rightarrow R_1 \text{ משורה 3} \end{aligned}$$

הערות:

1. משפט: הפעלת פעולה שורה ρ על מטריצה A זהה להחפלת המטריצה המתאימה מימין $\rho(I)A$.

2. המכפלה $A\rho(I)$ זהה להפעלת פעולת עמודה אלמנטרית.

$$\begin{aligned} & \text{דוגמא: המטריצה } \rho(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ כאשר } \rho \text{ מציין הורדת עמודה 1 מעמודה} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} C_3 - C_1 \rightarrow C_3 \end{aligned}$$

הפיכות

תהא $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ אם קיימת $B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ כך ש $AB = BA = I_n$ אזי A תקרא הפיכה ו B תקרא ההופכית שלה ותוסמן ב $B = A^{-1}$. הערה: משפט: מספיק ש B תקיים ש $AB = I_n$ או $BA = I_n$ ואז A הפיכה (לא את שני השוויונות $AB = BA = I_n$).

חידוד $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ אזי $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אבל לכל $B \in \mathbb{F}^{2 \times 3}$ מתקיים

$$BA = \begin{pmatrix} | & | & 0 \\ C_1(B) & C_2(B) & 0 \\ | & | & 0 \end{pmatrix} \neq I_3$$

טענה: תהא $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ הפיכה. הוכח $AB = 0 \Rightarrow B = 0$.

פתרון: $AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0 \Rightarrow B = 0$ ■

הערה: אם A אינה הפיכה אז הטענה לא נכונה דוגמא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

במקרה כזה ש $AB = 0$ או $BA = 0$ ו $B \neq 0$ אז A תקרא מחלקת אפס

תרגיל: A הפיכה $\Leftrightarrow A^k \Leftrightarrow A^k$ הפיכה. $\exists k \in \mathbb{N}$

פתרון: (\Rightarrow) נתון A^k הפיכה $A^k B = I \Leftrightarrow A^k B = I \Leftrightarrow AA^{k-1}B = I \Leftrightarrow AC = I$ כאשר

$C = A^{k-1}B$ כלומר A הפיכה.

(\Leftarrow) נתון ש- A הפיכה. נבחר $k = 1$ וסיימנו. ■
 תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה עם שורת אפסים. הוכח: לא הפיכה.
 פתרון: תהא שורה i שורת האפסים. אזי $\vec{0}B = \vec{0} = R_i(AB)$ לכל B
 בפרט לא קיימת B כך ש- $AB = I$.
 משפט: מטריצה אלמנטרית $E = \rho(I)$ היא הפיכה ומתקיים $E^{-1} = \rho^{-1}(I)$.
 תרגיל: מצא את ההופכית של המטריצות מתחילת השיעור:

$$\text{פתרון: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

הערה: עבור מטריצה P -המחליפה שורות $R_i \leftrightarrow R_j$ מתקיים $P^2 = I$ כלומר $P^{-1} = P$.
 תרגיל: יהיו A, B הפיכות הוכח:

$$1. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

פתרון: נבדוק ישירות

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$2. (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$$

לכל n טבעי מתקיים $n = 1$ ברור. נניח נכון עבור $n - 1$ ונוכיח עבור n .
 הוכחה: באינדוקציה: עבור $n = 1$ ברור. נניח נכון עבור $n - 1$ ונוכיח עבור n .

$$\begin{aligned} (AA \cdots A)(A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}) &= A^{n-1}AA^{-1}(A^{-1})^{n-1} \\ &= A^{n-1}(A^{-1})^{n-1} = A^{n-1}(A^{n-1})^{-1} = I \end{aligned}$$

Induction assumption

הערה: לא ניתן לדעת שום דבר על הביטוי $(A+B)^{-1}$.

ייתכן $A+B=0$ לא הפיכה. $A=I, B=-I$ הפיכות ו $A+B=0$ לא הפיכה.

ייתכן $A+B=I_2$ לא הפיכות ו $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ הפיכה.

$$3. (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

פתרון $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$

מסקנה אם הפיכה וסימטרית אזי A^{-1} גם כן סימטרית.

הסבר $A^{-1} \Leftarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$ סימטרית ■

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

דוגמא נוספת: מבדיקה ישירה רואים ש $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ למשל מטריצת סיבוב בזווית θ במישור

$$\frac{1}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ההופכית שלה היא $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ סיבוב ב $(-\theta)$

אלגוריתם להפוך מטריצות

בהנתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ A ל- I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר $E_n \cdots E_1 A = I$ (אלמנטריות).
 $E_n \cdots E_1 I = E_n \cdots E_1 = A^{-1} \Leftarrow$ לכן אם נתבונן ב- $(A|I)$ נפעיל פעולות אלמנטריות על $E_n \cdots E_1$ המטריצה המורחבת נקבל בסוף $(I|A^{-1})$.

תרגיל: חשב עבור את ההוכפית של $A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 2i & 2 & -2i \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array} \right) \text{ פתרון}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -i & -1 & 2i \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \\ 1 & -i & -1 \\ -i & -1 & 2i \end{pmatrix} \text{ כלומר הערות:}$$

1. בהנתן מטריצה הפיכה A אזי למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד והוא $x = A^{-1}b$

לדוגמא: הפתרון למערכת $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

הינו $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \\ 1 & -i & -1 \\ -i & -1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. אם אחרי הדירוג של A לא שווה ל I אזי A אינה הפיכה.

הוכחה: נסמן ב E את מכפלת המטריצות האלמנטריות שמדרגות את A . ברור כי E הפיכה כמכפלה של מטריצות הפיכות. אם A הפיכה אזי גם EA הפיכה. אבל ב EA יש שורת אפסים כי $EA \neq I$ סתירה לתרגיל מתחילת התרגול.

פירוק מטריצה הפיכה למטריצות אלמנטריות

בהנתן מטריצה A הפיכה ניתן לעבור מ A ל- I ע"י פעולות שורה אלמנטריות. כלומר

$$E_n \cdots E_1 A = I \quad (\text{אלמנטריות}).$$

$$A = E_n^{-1} \cdots E_1^{-1} I = E_n^{-1} \cdots E_1^{-1}, \quad E_n \cdots E_1 = A^{-1} \Leftarrow$$

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ פרק את A ו A^{-1} למטריצות אלמנטריות.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3 \rightarrow R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

את הפעולות האלמנטריות נייצג במטריצה האלמנטרית המתאימה

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = I \quad \text{כלומר}$$

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1, \quad A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow$$