תרגיל 2

להגשה עד 30.11.16

שאלה 1

יהיו $\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב־X. הראו כי אם $\mathbb{A}_1\subseteq\mathbb{A}_2\subseteq\sigma(\mathbb{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathbb{A}_1)=\sigma(\mathbb{A}_2)$.

שאלה 2

יהיו X קבוצה, $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{P}(X)$. הראו כי לכל $A\in\mathcal{F}(\mathbb{A})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}$ כך ש: $A\in\mathcal{F}(\mathbb{B})$.

הדרכה:

1. הראו כי קבוצת הקבוצות ב־ $\mathcal{F}(\mathbb{A})$ המקיימת תכונה זו הינה σ אלגברה.
2. הראו כי הקבוצות ב־$\mathbb{A}$ מקיימות תכונה זו והסיקו את הנדרש.

שאלה 3

נניח ש $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ הינן מידות על מרחב מדיד $(X,\mathbb{A})$ ולכל $A\in\mathbb{A}$: $\mu_n(A)\nearrow$. נגדיר:

$$\mu(A):=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A).$$

האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

שאלה 4

יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית, ותהי Y קבוצה לא ריקה. נתונה פונקציה $f:X\to Y$.

1. נגדיר: $\mathbb{B}_f:=\left\{F\subseteq Y\ :\ f^{-1}(F)\in\mathbb{A}\right\}$. הוכיחו כי $(Y,\mathbb{B}_f)$ הינו מרחב מדיד.
2. לכל קבוצה $E\subseteq Y$ ששייכת ל $\mathbb{B}_f$, נגדיר: $\nu(E):=\mu(f^{-1}(E))$.
הוכיחו כי $(Y,\mathbb{B}_f,\nu)$ הינו מרחב מידה חיובית.

שאלה 5

יהי $(\mathbb{X},\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית. הוכיחו כי הבאים שקולים:

1. לכל $E\in\mathbb{A}$ כך ש $\mu(E)=\infty$, קיימת $F\in\mathbb{A}$ כך ש: $F\subseteq E$ ו: $0<\mu(F)<\infty$.
2. לכל $E\in\mathbb{A}$ מתקיים: $\mu(E)=\sup\{\mu(F):\mu(F)<\infty\ ;\ E\supseteq F\in\mathbb{A}\}$.

רמז לכיוון 1⇐2 : נניח בשלילה כי $w:=\sup\{\mu(F):\mu(F)<\infty\ ;\ E\supseteq F\in\mathbb{A}\}<\mu(E)$,
אזי קיימת סדרה $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ב $\mathbb{A}$, כך שלכל $n\in\mathbb{N}$: $\mu(F_n)<\infty$, ומתקיים: $\mu(F_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}w$. מה ידוע על: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$?

הערה: מידה המקיימת את התנאים בתרגיל זה נקראת מידה סופית מקומית.

בהנאה!