מבוא לאנליזה 1 – השלמה לתרגול 2

- בסוף התרגול הוכחנו את הטענה הבאה:

טענה: אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$, אזי $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

- בסיום ההוכחה ציינו שהטענה נכונה גם כאשר $L = 0$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נתון כי $0 < a_n \to 0$, לכן בפרט עבור $\varepsilon' := \varepsilon^2 > 0$ קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים: $|a_n - 0| = a_n < \varepsilon' = \varepsilon^2$, כלומר $0 < a_n < \varepsilon^2$. ניקח $n_0 = n_1$. אז לכל $n \geq n_0$ מתקיים: $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$, ולכן $\sqrt{a_n} \to 0$ כדרוש.

- לבסוף שאלנו האם ייתכן ש-$L < 0$?

נראה שהתשובה לכך שלילית בעזרת הטענה (הכללית יותר) הבאה:

טענה: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n \geq m$ לכל $n \geq n_0$, וכן $a_n \to L \in \mathbb{R}$. אזי $L \geq m$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $L < m$, ונסמן $\varepsilon := \frac{m-L}{2} > 0$. כיוון ש-$a_n \to L$, קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon = \frac{m-L}{2}$. אבל אז בפרט $a_n - L < \frac{m-L}{2}$, כלומר $a_n < \frac{m-L}{2} + L = \frac{m+L}{2} < \frac{m+m}{2} = m$ ז"א $\boldsymbol{a_n < m}$ לכל $n \geq n_1$. זאת בסתירה לנתון $\boldsymbol{a_n \geq m}$ לכל $n \geq n_0$.