

פיסיקה למתמטיקאים

מטוטלת פשוטה

1. משוואת התנועה עבור מטוטלת פשוטה באורך ℓ היא

$$(1) \quad m\ell\ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta,$$

כאשר $-mg \sin \theta$ רכיב המשקל בכיוון המשיקי. נסמן $\omega = \sqrt{g/\ell}$ ונקבל

$$(2) \quad \ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0.$$

בקרוב תנודות קטנות $\sin \theta \approx \theta$ ועם תנאי ההתחלה

$$(3) \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

הפתרון ל (2) הינו

$$(4) \quad \theta = \theta_0 \cos \omega t.$$

זמן המחזור של התנודות נתון ע"י

$$(5) \quad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}.$$

נקבל כעת בטוי לזמן המחזור ללא קירוב תנודות קטנות. לשם כך נכפול את (2) ב $\dot{\theta}$ ונקבל

$$(6) \quad \dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega^2\dot{\theta}\sin\theta = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2 \cos \theta \right) = 0,$$

ולכן

$$(7) \quad E = \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2 \cos \theta \right) = \text{const.}$$

בפרט, אם נציב את תנאי ההתחלה (3) נקבל

$$(8) \quad E = -\omega^2 \cos \theta_0,$$

ועל כן מהצבה ב (7) נקבל

$$(9) \quad \frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{2\omega^2(\cos \theta - \cos \theta_0)},$$

כאשר \pm מציין את כוון התנועה. זמן המחזור T יהיה אפוא 4 פעמים הזמן הדרוש להשלים תנועה זוויתית $0 \leq \theta \leq \theta_0$ כלומר

$$(10) \quad T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}.$$

האינטגרל באגף ימין של (10) נקרא אינטגרל אליפטי מסוג ראשון של לג'נדר ואינו פתיר אנליטית.

נשיב לב כי בקרוב תנודות קטנות $\theta \approx \theta_0$, $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, $\cos \theta_0 \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_0^2$ נקבל

$$(11) \quad T \approx \frac{4}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{2\pi}{\omega}.$$