הרצאה 5

הגדרה – איבר מינימאלי

תהיי $(A,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. $a\in A$ ייקרא איבר מינימאלי אם לא קיים $a\ne b\in A$ כך ש $b\le a$.

דוגמאות

1. היחס $R=\{(a,b)\in A\times A : \text{ ושונה נמנו } b \text{ מחלק את } a\}$ כאשר $A=\mathbb{N}$, כל המספרים הראשוניים הם איברים מינימאליים.
2. תהיי $A=\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. נגדיר את היחס מעל A ע"י $(A_i,A_j)\in R\Leftrightarrow A_i\subseteq A_j$.
נקבל יחס סדר חלקי.
$A=\{A_i\}_{i\in I}$ כאשר $A_1=\{1,2,3\}, A_2=\{2,3,4\}, A_3=\{2\}, A_4=\{4\}$ ואז
$R=\{(A_1,A_1),(A_2,A_2),(A_3,A_3),(A_4,A_4),(A_3,A_2),(A_3,A_1),(A_4,A_2)\}$.
שימו לב A_3,A_4 הם איברים מינימאליים מכיוון שלא קיים $B\in A$ כך ש $(B,A)\in R$.
3. $A=\{A_i\}_{i\in I}$ כאשר $A_1=\{1,2,3,4\}, A_2=\{2,3,4\}, A_3=\{2\}$.
$R=\{(A_1,A_1),(A_2,A_2),(A_3,A_3),(A_3,A_1),(A_3,A_2),(A_2,A_1)\}$.
שימו לב A_3 הוא איבר מינימאלי מכיוון שלא קיים $B\in A$ כך ש $(B,A_3)\in R$.

ההבדל בין דוגמה 2 לדוגמה 3

בדוגמה 2 – A_3 הוא איבר מינימאלי ולכל $B\in A$ $(A_3,B)\in R$ ואילו בדוגמה 3 - A_3 הוא איבר מינימאלי אבל קיים $A_4=B\in A$ כך ש $(A_3,A_4)\notin R$.
יש צורך בהגדרה נוספת שתבדיל בין המקרה שבדוגמה 1 למקרה שבדוגמה 2.

הגדרה – איבר קטן ביותר

תהיי $(A,\le)$. $a\in A$ ייקרא איבר קטן ביותר אם לכל $b\in A$ $a\le b$.

ההבדל בין איבר קטן ביותר לאיבר מינימאלי

שימו לב שכל איבר קטן ביותר הוא איבר מינימאלי, מכיוון שאם איבר כלשהו $a\in A$ הוא קטן ביותר אז לכל $b\in A$ $a\le b$ ולכן הוא גם מינימאלי כי אחרת קיים $a\ne c\in A$ כך ש $c\le a$ ומכיוון ש a הוא קטן ביותר אז $a\le c$ ומכיוון שיחס סדר חלקי הוא אנטי סימטרי נקבל ש $a=c$ בסתירה לכך ש $a\ne c$.
ההפך לא בהכרח נכון.
נתבונן שוב בדוגמה 3
$A=\{A_i\}_{i\in I}$ כאשר $A_1=\{1,2,3\}, A_2=\{2,3,4\}, A_3=\{2\}, A_4=\{4\}$ ואז
$R=\{(A_1,A_1),(A_2,A_2),(A_3,A_3),(A_4,A_4),(A_3,A_2),(A_3,A_1),(A_4,A_2)\}$.
A_3 הוא איבר מינימאלי אבל הוא לא הקטן ביותר.

באותו אופן ניתן להגדיר איבר מקסימאלי ואיבר גדול ביותר.

הגדרה – איבר מקסימאלי

תהיי $(A,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. $a\in A$ ייקרא מקסימאלי אם לא קיים $a\ne b\in A$ כך ש $a\le b$.

דוגמאות

1. תהיי $A=\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. נגדיר את היחס מעל A ע"י $(A_i,A_j)\in R\Leftrightarrow A_i\subseteq A_j$.
נקבל יחס סדר חלקי.
$A=\{A_i\}_{i\in I}$ כאשר $A_1=\{1,2,3\}, A_2=\{2,3,4\}, A_3=\{2\}, A_4=\{4\}$ ואז
$R=\{(A_1,A_1),(A_2,A_2),(A_3,A_3),(A_4,A_4),(A_3,A_2),(A_3,A_1),(A_4,A_2)\}$.

שימו לב A_1, A_2 הם איברים מקסימאליים מכיוון שלא קיים $B\in A$ כך ש $(A,B)\in R$.

2. $A=\{A_i\}_{i\in I}$ כאשר $A_1=\{1,2,3,4\}, A_2=\{2,3,4\}, A_3=\{2\}$.

$R=\{(A_1,A_1),(A_2,A_2),(A_3,A_3),(A_3,A_1),(A_3,A_2),(A_2,A_1)\}$.

שימו לב A_1 הוא איבר מקסימאלי מכיוון שלא קיים $B\in A$ כך ש $(B,A_3)\in R$.

<u>הגדרה – איבר גדול ביותר</u>

תהיי $(A,\le)$. $a\in A$ ייקרא איבר גדול ביותר אם לכל $b\in A$ $b\le a$.

<u>שימו לב:</u> להבדל בין איבר גדול ביותר לאיבר מקסימאלי.

<u>טענה</u>

תהיי $(A,\le)$ קבוצה סדורה חלקית – אם $a\in A$ קטן ביותר אז a יחיד.

<u>הוכחה</u>

נניח ש $a\in A$ איבר קטן ביותר ונניח ש $b\in A$ גם איבר קטן ביותר.

מכיוון ש a איבר קטן ביותר אז לכל $c\in A$ נקבל ש $a\le c$ ובפרט עבור $c=b$ נקבל ש $a\le b$.

מכיוון ש b איבר קטן ביותר אז לכל $c\in A$ נקבל ש $b\le c$ ובפרט עבור $c=a$ נקבל ש $b\le a$.

מכיוון שיחס סדר חלקי הוא אנטי סימטרי וקיבלנו ש $a\le b\wedge b\le a$ אז $a=b$.

<u>דוגמה</u>

תהיי $A=\{i\in\mathbb{N}|1\le i\le 25\}$ ונגדיר את היחס $\le$ באופן הבא: a מחלק את $b \Leftrightarrow a\le b$.

נשים לב שלכל $a\in A$ נקבל ש $1\le a$ ולכן 1 הוא איבר קטן ביותר.

תהיי $A=\{i\in\mathbb{N}|2\le i\le 25\}$ ונגדיר את היחס $\le$ באופן הבא: a מחלק את $b \Leftrightarrow a\le b$.

נשים לב שבמקרה זה אין איבר קטן ביותר, אבל יש איברים מינימאליים.

<u>טענה</u>

נניח ש $\le$ יחס סדר מלא מעל A אז $a\in A$ מינימאלי אם ורק אם $a\in A$ קטן ביותר.

<u>הוכחה</u>

$\Rightarrow$

יחס סדר מלא הוא בפרט יחס סדר חלקי והראינו שאיבר קטן ביותר בקבוצה סדורה חלקית הוא מינימאלי.

$\Leftarrow$

נניח ש $a\in A$ מינימאלי, לפי הגדרת המינימאליות לא קיים $b\in A$ כך ש $b\le a$. $\le$ הוא יחס סדר מלא ולכן הוא יחס משווה, ולכן לכל $b\in A$ מתקיים $a\le b\vee b\le a\vee a=b$ מכיוון ש a מינימאלי אז לא ייתכן ש $b\le a$ ולכן מתקיים $a\le b\vee a=b$ ז"א לכל $b\ne a$ מתקיים $a\le b$ ועל פי הגדרת איבר קטן ביותר נקבל ש $a\in A$ איבר קטן ביותר.

<u>הגדרה</u>

תהיי $(A,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. קבוצה $B\subseteq A$ תקרא קבוצה חסומה מלעיל ב $(A,\le)$ אם קיים איבר $a\in A$ כך שלכל $b\in B$ $b\le a$. a כזה ייקרא חסם מלעיל של B.

<u>דוגמאות</u>

1. הקטע $(-\infty,1)$ חסום מלעיל ב $(\mathbb{R},\le)$. כל מספר ממשי הגדול או שווה ל 1 הוא חסם מלעיל של $(-\infty,1)$.
2. קבוצת הרציונלים אינה חסומה מלעיל ב $(\mathbb{R},\le)$.

<u>הגדרה</u>

תהיי $(A,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. חסם מלעיל $a\in A$ ייקרא חסם עליון (סופרימום) של קבוצה $B\subseteq A$ אם לכל חסם מלעיל x של B מתקיים $a\le x$.

דוגמה

בדוגמה 1 המספר $1\in\mathbb{R}$ הוא חסם עליון של הקטע $(-\infty,1)$ ב $(\mathbb{R},\leq)$.

תרגיל

תן דוגמה לקבוצה לא ריקה ב $(\mathbb{Q},\leq)$ שחסומה מלעיל, אבל ללא חסם עליון.

פתרון

נתבונן בקבוצה $B=\mathbb{Q}\cap\left(0,\sqrt{2}\right)$. B היא קבוצה לא ריקה המוכלת בקבוצת הרציונלים וחסומה מלעיל למשל ע"י 2. נראה שלקבוצה B אין חסם עליון. נניח ש a חסם עליון של B אז הוא בפרט חסם מלעיל ולכן $\sqrt{2}\leq a$ מכיוון ש $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ אז $a\neq\sqrt{2}$ ולכן $\sqrt{2}<a\in\mathbb{Q}$. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר רציונלי ולכן קיים $c\in\mathbb{Q}$ כך ש $\sqrt{2}<c<a$ בסתירה לכך ש a חסם עליון.

הגדרה

תהיי $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית. קבוצה $B\subseteq A$ תקרא קבוצה חסומה מלרע ב $(A,\leq)$ אם קיים איבר $a\in A$ כך שלכל $b\in B$ $a\leq b$. a כזה ייקרא חסם מלרע של B.

חסם מלרע $a\in A$ ייקרא חסם תחתון (אינפימום) של קבוצה $B\subseteq A$ אם לכל חסם מלרע x של B מתקיים $x\leq a$.

B תיקרא קבוצה חסומה אם היא חסומה גם מלעיל וגם מלרע.

דוגמאות

1. כל קטע מהצורה $(a,b),[a,b],[a,b),(a,b]$ חסום ב $\mathbb{R}$. a הוא חסם תחתון ו b הוא חסם עליון.
2. הקבוצה $\mathbb{N}$ חסומה מלרע ב $(\mathbb{R},\leq)$, למשל ע"י 3-. היא אינה חסומה מלעיל ב $(\mathbb{R},\leq)$.
3. הקבוצה $\mathbb{Q}$ אינה חסומה מלעיל או מלרע ב $(\mathbb{R},\leq)$.

הגדרה

שריג הוא קבוצה סדורה חלקית בו לכל שני איברים יש סופרימום ואינפימום.

דוגמאות

1. כל יחס סדר מלא הוא שריג.
2. הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ עם היחס $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ אינה סריג מכיוון שלקבוצה $\{1,3\}$ אין חסם עליון.
3. הקבוצה $A=\{1,2,3,4\}$ עם היחס
$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(2,4),(1,4),(3,4)\}$ סריג מכיוון שלכל שני איברים יש חסם עליון ויש חסם תחתון.
4. תהיי A קבוצה כלשהי ראינו ש $\left(P(A),\subseteq\right)$ הוא סדר חלקי. היחס הנ"ל הוא שריג מכיוון שלכל שני איברים A_1,A_2 ב $P(A)$ קיים חסם עליון $A_1\cup A_2$ וחסם תחתון $A_1\cap A_2$.
5. היחס על $\mathbb{N}$ המוגדר: a מחלק את $b\Leftrightarrow a\leq b$ הוא יחס סדר חלקי. היחס הנ"ל הוא שריג מכיוון שלכל שני מספרים טבעיים a,b קיים חסם עליון $(L.C.D)$ וחסם תחתון $(G.C.D)$.