תורת המשחקים – שיעור 7

אסטרטגיות מעורבות - המשך

אסטרטגיות מעורבות – הגדרה

- יהי G משחק אסטרטגי כך שלכל שחקן יש מספר סופי או בן מניה של אסטרטגיות.
- נגדיר משחק G' שנקרא הרחבת G בעזרת אסטרטגיות מעורבות:
- לשחקן $i \in I$ נגדיר אסטרטגיה p_i להיות וקטור שמתאים לכל אסטרטגיה $x_i \in S_i$ הסתברות $p_i(x_i) \in [0,1]$.
- ומתקיים

$$\sum_{i \in I} p_i(x_i) = 1$$

- ופונקציות תועלת

$$u_i(p_i, p_{-i}) = \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i) u_i(x_i, p_{-i})$$

משחק טניס

- נדמה מצב במשחק טניס בין סרינה ויליאמס ומריה שראפובה.
- ויליאמס (שחקנית 1) צריכה לחבוט לכיוונה של שראפובה (שחקנית 2) והיא צריכה להחליט האם לחבוט ל**שמאלה** או **לימינה** של שראפובה.
- שראפובה צריכה להחליט אם היא מתכוננת לחבטה שתבוא מימינה או משמאלה.

מטריצת האסטרטגיות

	ℓ	r
L	50,50	80,20
R	90,10	20,80

- האם יש במשחק זה אסטרטגיות נשלטות? האם יש שיווי משקל נאש?

ניתוח המשחק

- בכל מקרה עדיף לשחקנית שלא לבחור באסטרטגיה קבועה אחת, מדוע?
- אנחנו יודעים לפי ***משפט נאש (שיעור 6)***, שאם נכניס למשחק אסטרטגיות מעורבות לשתי השחקניות, אז קיים שיווי משקל נאש.
- לעומת משחקים פשוטים יותר כמו ***זוג או פרט***, קשה יותר לנחש את נקודת שיווי המשקל.

טניס – באסטרטגיות מעורבות

- ויליאמס תבחר באסטרטגיה L בהסתברות p ובאסטרטגיה R בעדיפות $1-p$.

- שראפובה תבחר באסטרטגיה ℓ בעדיפות q ובאסטרטגיה r בעדיפות $1-q$.

חישוב פונקציות התועלת

- כעת פונקצית התשלום של ויליאמס היא

$$u_1([p,1-p],[q,1-q]) =$$

$$= pu_1\left(L,[q,1-q]\right) + (1-p)u_1\left(R,[q,1-q]\right)$$

$$= pqu_1\left(L,\ell\right) + p(1-q)u_1\left(L,r\right) +$$

$$+(1-p)qu_1\left(R,\ell\right) + (1-p)(1-q)u_1\left(R,r\right)$$

$$= 50pq + 80p(1-q) +$$

$$+90(1-p)q + 20(1-p)(1-q)$$

$$= (\text{-}100q + 60)\,\mathrm{p} + 70q + 20$$

חישוב פונקציות התועלת – המשך

- בצורה דומה, ניתן לחשב את פונקצית התועלת של שראפובה:

$$u_2([p,1-p],[q,1-q]) =$$

$$= 50pq + 20p(1-q) +$$
$$+10(1-p)q + 80(1-p)(1-q)$$

$$= (100p - 70)q - 60p + 80$$

תגובה מיטבית של כל שחקנית

- נחשב את התגובה המיטבית של ויליאמס אל מול אסטרטגיה מעורבת של שראפובה:

$$BR_1([q,1-q]) = ?$$

- כרגיל, צריך למצוא את הערך p בו הפונקציה u_1 מקבלת מקסימום, כאשר q הוא קבוע.

- הפונקציה u_1 היא לינארית ב p ולכן נק' המקסימום נקבעת ע"פ סימן השיפוע.

- השיפוע הוא $-100q + 60$

תגובה מיטבית של כל שחקנית – המשך

- מכאן נקבל:

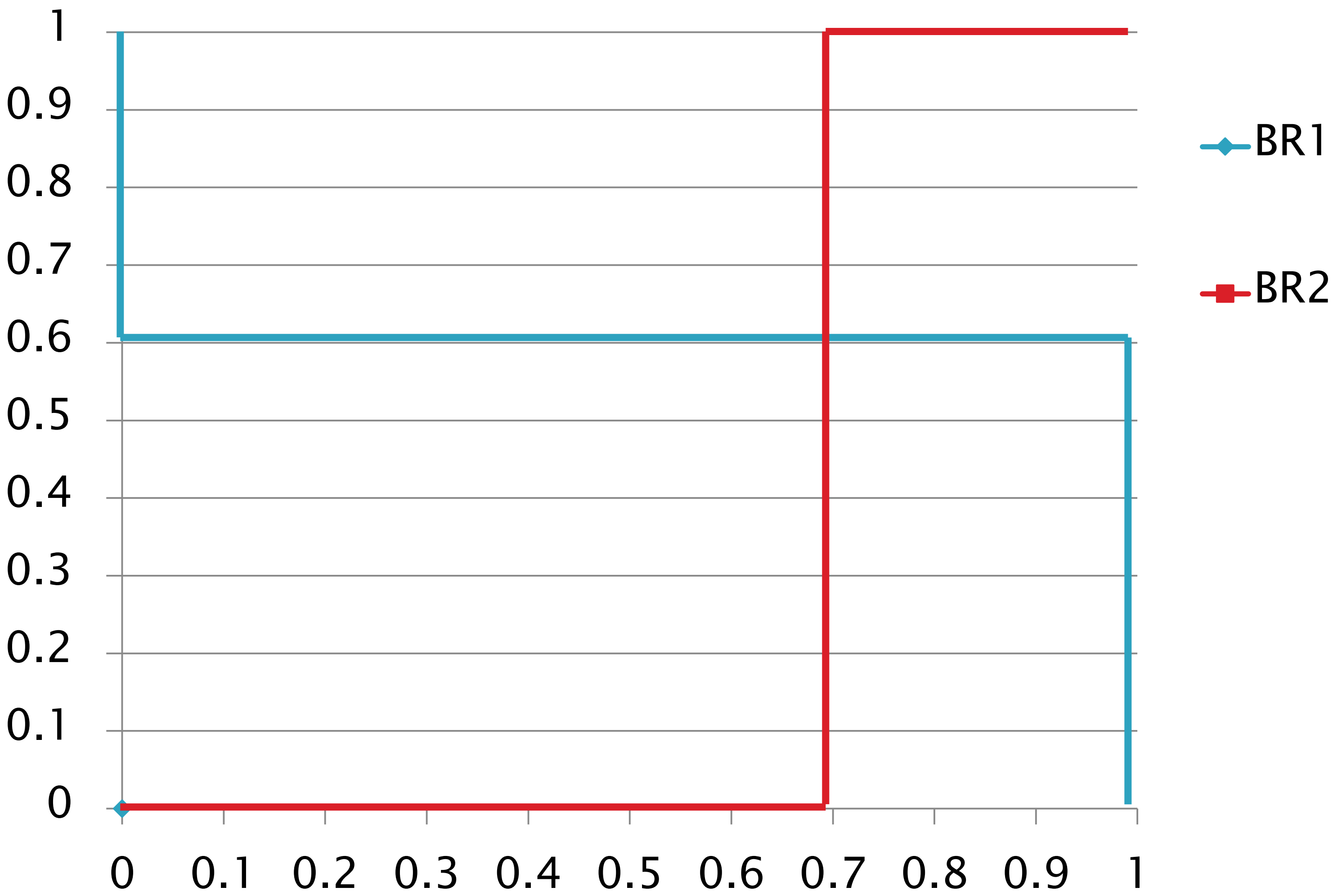
$$BR_1(q) = \begin{cases} 1 & q < \dfrac{6}{10} \\ [0,1] & q = \dfrac{6}{10} \\ 0 & q > \dfrac{6}{10} \end{cases}$$

תגובה מיטבית של כל שחקנית – המשך

- בצורה דומה מחשבים את התגובה המיטבית של שראפובה.
- השיפוע של הפונקציה u_2 הוא $100p-70$.

$$BR_2(\mathrm{p}) = \begin{cases} 0 & p < \frac{7}{10} \\ [0,1] & p = \frac{7}{10} \\ 1 & p > \frac{7}{10} \end{cases}$$

מציאת נקודת שיווי משקל



סיכום

- שיווי המשקל מתקבל בנקודה $(p,q) = (\frac{7}{10}, \frac{6}{10})$.
- לויליאמס לחבוט בעדיפות קלה לשמאלה של שראפובה, ועל שראפובה להיות מוכנה יותר (במידה מועטה) לכדור שמגיע משמאל.
- <u>נראה כעת שיש דרך קלה יותר להגיע אל התוצאה!!!</u>

אסטרטגיה מעורבת שהיא תגובה מיטבית

- **<u>משפט:</u>** נניח שאסטרטגיה מעורבת p_i של שחקן i היא תגובה מיטבית של השחקן לצירוף האסטרטגיות p_{-i} של שאר השחקנים. אזי כל אסטרטגיה s_i המופיעה ב p_i עם הסתברות חיובית חייבת להיות גם כן תגובה מיטבית לצירוף p_{-i}.

- **<u>מסקנה:</u>** בתנאי המשפט כל התשלומים של אסטרטגיות s_i המופיעות ב p_i עם הסתברות חיובית חייבים להיות <u>שווים</u>!

הוכחת המשפט

- עבור אסטרטגיה מעורבת p_i מתקיים:

$$BR_i(p_{-i}) = u_i(p_i, p_{-i}) =$$

$$= \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i) u_i(x_i, p_{-i})$$

$$\leq \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i)\left(\max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i})\right)$$

$$\leq \left(\max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i})\right) \sum_{x_i \in S_i} p_i(x_i)$$

$$= \max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i}) \ = BR_i(\mathrm{p}_{-i})$$

אם כך יש
כאן שיוון

הוכחת המשפט – המשך

- לכן עבור כל אסטרטגיה $x_i \in S_i$ עבורה $p_i(x_i) > 0$ מתקיים בהכרח

$$u_i(x_i, p_{-i}) = \max_{x_i \in S_i} u_i(x_i, p_{-i})$$

- כלומר כל אסטרטגיה עם הסתברות חיובית היא תגובה מיטבית.

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

- נניח מראש שאנחנו יודעים/מנחשים שנקודת שיווי המשקל היחידה היא כאשר שתי השחקניות בוחרות באסטרטגיות מעורבות (ממש).

- לדוגמה: פסלנו מראש את האפשרות שקיים שיווי משקל בו שראפובה בוחרת באסטרטגיה מעורבת וויליאמס בוחרת באסטרטגיה טהורה.

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

- כעת נחשב את התועלות הטהורות של ויליאמס, כאשר שראפובה בוחרת באסטרטגיה המעורבת q^* של שיווי המשקל:

	ℓ	r
L	50,50	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_1(L,q^*) = 50q^* + 80(1-q^*) \\ u_1(R,q^*) = 90q^* + 20(1-q^*) \end{cases}$$

- כעת בא ה**טריק**: בתגובה המיטבית של ויליאמס, שני הערכים $u_1(L,q^*), u_2(R,q^*)$ חייבים להיות שווים!!!

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

- אם כך קיבלנו

$$-30q^{*}+80=70q^{*}+20$$

- או

$$q^{*}=\frac{6}{10}$$

- קיבלנו תופעה מעניינת: בעזרת האסטרטגיות של ויליאמס, חישבנו דווקא את אסטרטגית שיווי המשקל של שראפובה!!!

טניס – חישוב NE בעזרת המשפט

- כעת נחשב את התועלות הטהורות של שראפובה, כאשר ויליאמס בוחרת באסטרטגיה המעורבת p^* של שיווי המשקל:

	ℓ	r
L	50,50	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_2(p^*,\ell) = 50p^* + 10(1-p^*) \\ u_2(p^*,\mathrm{r}) = 20p^* + 80(1-p^*) \end{cases}$$

- נשווה את שתי השורות, ונקבל $p^* = \frac{7}{10}$.

מסקנות משיטת החישוב החדשה

- שחזרנו את נקודת שיווי משקל נאש ללא חישוב פונקציות התגובה המיטבית.
- אם שראפובה אינה בוחרת באסטרטגית שיווי המשקל שלה, אזי בהכרח נקבל שהאסטרטגיה המיטבית של ויליאמס היא אסטרטגיה טהורה. מדוע?
- תשובה: כיוון ש q^* היא האסטרטגיה היחידה בה התועלות של ויליאמס משתוות, ולכן בבחירת q אחרת, לא ייתכן שאסטרטגיה מעורבת תהיה תגובה מיטבית.
- בצורה כזאת ניתן לשחזר את פונקצית התגובה המיטבית.

טניס – ויליאמס מכה שנית

- נניח כעת שלקראת המשחק הבא של שתי השחקניות, מריה שראפובה מנסה לשפר את מכת ה backhand שלה, ולענות יותר טוב לכדורים שבאים משמאלה:

	ℓ	r
L	30,70	80,20
R	90,10	20,80

ניתוח אינטואיטיבי של המשחק

- ***השפעה ישירה***: כעת שחל שיפור במכת ה backhand, סביר לחשוב ששראפובה תעדיף יותר להתכונן לכיוון שמאל, כלומר נצפה לאסטרטגית שיווי משקל לקיים $q^* > \frac{6}{10}$.
- ***השפעה אסטרטגית***: כיוון שויליאמס יודעת שחל שיפור בחבטות של שראפובה, היא תעדיף לחבוט יותר לימינה של שראפובה. אם כך, עדיף על שראפובה להתכונן לחבטות מצד ימין. לכן נצפה שיתקיים $q^* < \frac{6}{10}$.
- קיבלנו אם כך שיש כוחות שמושכים את נקודת שיווי המשקל לכיוונים מנוגדים.

חישוב NE במשחק החדש

	ℓ	r
L	30,70	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_1(L,q^*) = 30q^* + 80(1-q^*) \\ u_1(R,q^*) = 90q^* + 20(1-q^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow q^* = \frac{1}{2}$$

	ℓ	r
L	30,70	80,20
R	90,10	20,80

$$\begin{cases} u_2(p^*,\ell) = 70p^* + 10(1-p^*) \\ u_2(p^*,\mathrm{r}) = 20p^* + 80(1-p^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^* = \frac{7}{12}$$

מסקנות

- ראינו שלמרות ששראפובה שיפרה את מכת ה backhand שלה, עליה להמנע מנטייה מוגברת להתכוננות לצד שמאל.
- כלומר ההשפעה האסטרטגית גברה על ההשפעה הישירה.
- אם כך יש להזהר בקביעת מסקנות לפי אינטואיציה בלבד.

- **האם ניתן להסתמך על חישוב נק' שיווי המשקל לחיזוי של משחקים אמיתיים?**
- סיבה אפשרית לכך שחיזוי כזה לא יהיה מדויק היא שבני אדם אינם מכונות טובות לייצור מספרים רנדומליים.

משפט נאש – תקציר הוכחה (לקריאה עצמית)

<u>משפט נאש:</u> יהי G משחק סופי עם מספר סופי של אסטרטגיות, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות (לכל השחקנים), אזי ב G' קיים שיווי משקל נאש.

משפט נאש – תקציר הוכחה

- נתמקד במשחק בו יש לכל שחקן שתי אסטרטגיות טהורות.
- כפי שראינו במשחק שנוצר ע"י הוספת אסטרטגיות מעורבות האסטרטגיות החדשות של שחקן i היא בחירת אסטרטגיה $p_i \in [0,1]$.
- תחום ההגדרה של הפונקציות u_i הוא קוביה רב-מימדית, שהיא תחום סגור, חסום וקמור.

למות עזר

- **<u>למה 1:</u>** $BR_i(p_{-i}) \neq \emptyset$.

- **<u>למה 2:</u>** $BR_i(p_{-i})$ היא קבוצה סגורה, קמורה וחסומה.

- **<u>למה 3:</u>** להתאמה $BR_i(p_{-i})$ יש גרף סגור.

התאמת התגובה הטובה ביותר

- בהנתן וקטור אסטרטגיות $(p_i)_{i\in I}$ נגדיר

$$BR\left((p_i)_{i\in I}\right)=\left\{(p'_i)_{i\in I} : p'_i \in BR_i(p_{-i}),\ i\in I\right\}$$

- או:

$$BR\left((p_i)_{i\in I}\right)=\prod_{i\in I} BR_i(p_{-i})$$

- **<u>למה 4:</u>** הקבוצה

$$BR\left((p_i)_{i\in I}\right)$$

היא קמורה, וסגורה ולא ריקה, ויש להתאמה BR גרף סגור.

תנאי מספיק והכרחי לקיום NE

- **<u>למה 5:</u>** וקטור אסטרטגיות $(p_i^*)_{i\in \mathrm{I}}$ הוא נקודת שיווי משקל נאש אם ורק אם קיימת להתאמה BR נקודת שבת, כלומר:

$$(p_i^*)_{i\in I} \in BR((p_i^*)_{i\in I})$$

משפט נקודת השבת של Kakutani

- יהי:
  - Y תחום סגור, חסום וקמור ב $\boldsymbol{R}^n$
  - $f \subseteq Y \times Y$ התאמה כך ש:
    - $f(y)$ היא קבוצה קמורה סגורה ולא ריקה לכל $y \in Y$.
    - ל f יש גרף סגור.
- אזי: ל f יש נקודת שבת, כלומר נקודה $y^* \in Y$ כך ש

$$y^* \in f(y^*)$$

סיום ההוכחה של משפט נאש

- ההתאמה BR מקיימת את התנאים של משפט Kakutani לפי למות 1-4.
- לכן קיימת לה נקודת שבת.
- לכן לפי למה 5 נקבל שקיימת נקודת שיווי משקל נאש.