חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1מ'1
(104017)

תרגול 1

עריכה: עמר בירן

הגהה: פרופ. יואב בנימיני, ד"ר. נעמי שקד

הדפסה: מאיה קריץ

ערך מוחלט

הערך המוחלט של x מסומן ב־ $|x|$ ומוגדר כך:

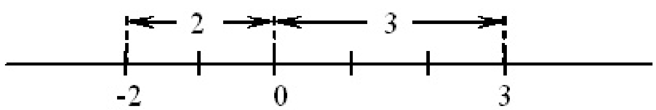
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

(<u>למתרגל:</u> להסביר את משמעות כל הסימונים)

<u>**המשמעות הגיאומטרית:**</u>

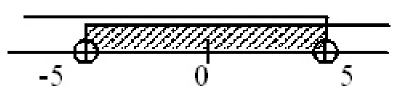
ערך מוחלט של מספר זהו המרחק של המספר מאפס:

$$| \ 3 \ | = 3$$
$$| -2| = 2$$



לפיכך,

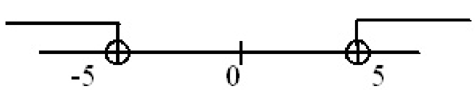
1) $|x| < 5$ משמעותו $x < 5$ <u>**וגם**</u> $-5 < x$



(<u>למתרגל:</u> x נמצא בין 5 ל־ (-5))

ניתן גם לרשום: $-5 < x < 5$

2) $|x| > 5$ משמעותו
$5 < x$ <u>**או**</u> $x < -5$

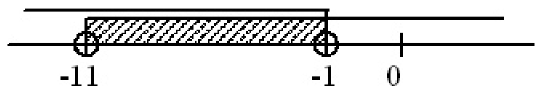


<u>תרגיל 1</u>

נפתור $|x+6|<5$. לפי האמור לעיל צריך שיתקיים

$x+6>-5$ וגם $x+6<5$

$x>-11$ $\quad$ $x<-1$



<u>תכונות:</u>

1. $|x|=|-x|$
2. $x\le|x|$
3. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$
4. $|x+y|\le|x|+|y|$ (אי שוויון המשולש לסכום)
5. $|x-y|\ge\Big||x|-|y|\Big|$ (אי שוויון המשולש להפרש)

(<u>למתרגל:</u> להסביר בע"פ את הסעיפים $1-3$, 5 יופיע בתרגיל בית.)

<u>הוכחת 4:</u>

נחלק ל־ 2 מקרים:

<u>מקרה א':</u> $x+y\ge 0$

אז לפי הגדרת ערך מוחלט: $|x+y|=x+y\overset{(2)}{\le}|x|+|y|$.

<u>מקרה ב':</u> $x+y<0$

לפי הגדרת ערך מוחלט: $|x+y|=-(x+y)=-x+(-y)\overset{(2)}{\le}|-x|+|-y|\overset{(1)}{=}|x|+|y|$.

קטעים ואי שוויונים

(<u>למתרגל:</u> להסביר על קטע פתוח ועל קטע סגור, על ההבדל ביניהם וכיצד מסמנים.)

לדוגמא, $x\in(1,2]$ כלומר, x שייך לקטע $(1,2]$ אם ורק אם $1<x\le 2$.

(<u>למתרגל:</u> להסביר מה זה או"א)

<u>תרגיל 2</u>

$$\left|\frac{x-3}{x+4}-2\right|>1$$

$$\left|\frac{x-3-2x-8}{x+4}\right|>1$$

$$\left|\frac{-x-11}{x+4}\right|>1$$

$$\frac{-x-11}{x+4}\overset{(\mathrm{II})}{<}-1 \quad \text{או} \quad \frac{-x-11}{x+4}\overset{(\mathrm{I})}{>}1$$

(I)

$$\frac{-x-11}{x+4} > 1$$

$$\frac{-x-11}{x+4} - 1 > 0$$

$$\frac{-x-11-x-4}{x+4} > 0$$

$$\frac{-2x-15}{x+4} > 0$$

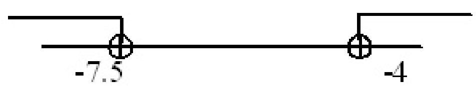
א) **אם** $x+4>0$ **(כלומר** $x>-4$ **)**

רוצים $-2x-15>0$

$-2x>15$

$x<-7.5$

(גם)



<u>מקרה זה לא ייתכן</u>

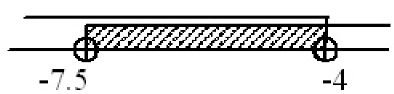
ב) **אם** $x+4<0$ **(כלומר** $x<-4$ **)**

רוצים $-2x-15<0$

$-2x<15$

$x>-7.5$

(גם)

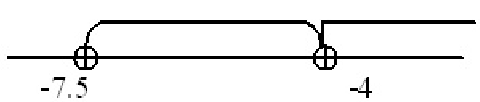


$\boxed{-7.5<x<-4}$

באופן דומה, נפתור את (II) **ונקבל** $x>-4$.

<u>**לסיכום,**</u>

(או)



כלומר,

$\boxed{x>-7.5 \quad \text{וגם} \quad x\neq -4}$

או בקטעים:

$\boxed{x\in(-7.5,-4)\cup(-4,\infty)}$

אי שוויון הממוצעים

סוגי ממוצעים:

עבור $x, y > 0$

ממוצע חשבוני: $\frac{x+y}{2}$

ממוצע הנדסי: $\sqrt{xy}$

ממוצע הרמוני: $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

מתקיים לכל $x, y > 0$: $\boxed{\text{חשבוני} \geq \text{הנדסי} \geq \text{הרמוני}}$

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \overset{\text{(II)}}{\leq} \sqrt{xy} \overset{\text{(I)}}{\leq} \frac{x+y}{2}$$

הוכחה:

(I)

$$\sqrt{xy} \overset{?}{\leq} \frac{x+y}{2}$$

$$(*) \qquad 2\sqrt{xy} \overset{?}{\leq} x+y$$

$$4xy \overset{?}{\leq} (x+y)^2$$

$$4xy \overset{?}{\leq} x^2+2xy+y^2$$

$$0 \overset{?}{\leq} x^2-2xy+y^2$$

$$0 \overset{\checkmark}{\leq} (x-y)^2$$

(II)

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \overset{?}{\leq} \sqrt{xy}$$

$$\frac{2}{\frac{y+x}{xy}} \overset{?}{\leq} \sqrt{xy}$$

$$\frac{2xy}{x+y} \overset{?}{\leq} \sqrt{xy}$$

$$2xy \overset{?}{\leq} (x+y)\sqrt{xy}$$

$$(*) \qquad 2\sqrt{xy} \overset{\checkmark}{\leq} x+y$$

הכללה: עבור n משתנים (יוכח בהמשך הקורס)

ממוצע חשבוני: $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

ממוצע הנדסי: $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$

ממוצע הרמוני: $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$

מתקיים לכל $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$: $\boxed{\text{חשבוני} \geq \text{הנדסי} \geq \text{הרמוני}}$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$