תרגולים במד"ח

תאריך עדכון אחרון:

20 בפברואר 2015

תוכן עניינים

1 תרגול 1

1.1 אדמינסטרציות

- גיא לנדסמן
- שעות קבלה: $14:00-15:00$, יום ג'.
- $Email: guy.lendsman@live.biu.ac.il$.
- אתר הקורס: $u.math.biu.ac.il/\sim lendesg$.

1.2 משוואות קוואזי ליניאריות

מדובר במשוואות מהצורה

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$$

1.2.1 שיטת לגראנז'

$$\frac{dx}{a(x,y,u)}=\frac{dy}{b(x,y,u)}=\frac{du}{c(x,y,u)}$$

ע"י פתירת שתי המשוואות מקבלים:

$$\begin{aligned}\phi_1(x,y,u) &= c_1\\ \phi_2(x,y,u) &= c_2\end{aligned}$$

הפתרון של המשוואה יהיה:

$$\begin{aligned}F(\phi_1,\phi_2) &= 0\\ F(\phi_1) &= \phi_2 \text{ or } F(\phi_2)=\phi_1\end{aligned}$$

תרגיל

$$yu_x-xu_y=0$$

פתרון

$$a = y, b = -x, \boxed{c = 0}$$

זהו מקרה מיוחד ולכן אחת מהמשוואות היא מהצורה

$$\boxed{u = c_1}$$

המשוואה השנייה:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{y} &= \frac{dy}{-x} \\ -xdx &= ydy \\ -\frac{x^2}{2} &= \frac{y^2}{2} + \frac{c_2}{2} \Big/ \cdot 2 \Rightarrow c_2 = x^2 + y^2 = \phi_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{u = F(x^2 + y^2)}$$

נניח שיש לנו תנאי התחלה $u(x,0) = x^2$

$$\begin{aligned} x^2 &= u(x,0) = F(x^2) \\ \Rightarrow F(t) &= t \\ u(x,y) &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

תרגיל

$$\begin{cases} \left(1 + x^2\right) z_x + xyz_y = 0 \\ z(0,y) = y^2 \end{cases}$$

פתרון

$$\begin{aligned}
a &= 1+x^2, b=xy, c=0 \Rightarrow \phi_1 = z \\
\frac{dx}{1+x^2} &= \frac{dy}{xy} \\
2\cdot\frac{xdx}{1+x^2} &= 2\cdot\frac{dy}{y} \\
\ln\left|1+x^2\right| &= 2\ln|y|+c \\
1+x^2 &= c\cdot y^2 \quad c>0 \\
c_2 &= \frac{1+x^2}{y^2} = \phi_2 \\
z &= F\left(\frac{1+x^2}{y^2}\right) \\
y\prime &= z(0,y) = F\left(\frac{1}{y^2}\right) \\
\Rightarrow F(t) &= \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{z(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2}}$$

תרגיל

$$xy_x + yu_y = 1$$

פתרון

$$a = x, b = y, c = 1$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = du$$

נבחר שתי משוואות. מקובל לבחור:

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} & \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + c \Rightarrow x = c_1 y \Rightarrow c_1 = \frac{x}{y} = \phi_1 \\ \frac{dx}{x} = du & \Rightarrow u + c = \ln|x| \Rightarrow x = c_2 e^u \Rightarrow \phi_2 = \frac{x}{e^u} \end{cases}$$

לא מה שרצינו לכן נחזור לביטוי המקורי:

$$\begin{aligned} u &= c_2 + \ln|x| \\ c_2 &= \boxed{u - \ln|x| = \phi_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u - \ln|x| &= F\left(\frac{x}{y}\right) \\ u &= \boxed{\ln|x| + F\left(\frac{x}{y}\right)} \end{aligned}$$

תרגיל

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + \frac{z}{2}u_z = 0 \\ u\left(1, y, z\right) = y + z^2 \end{cases}$$

פתרון

$$a = x, b = y, c = \frac{z}{2}, d = 0 \Rightarrow \phi_1 = u = c_1$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2dz}{z}$$

$$\begin{cases} I & \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow c_2 = \frac{x}{y} = \phi_2 \\ II & \frac{dx}{x} = \frac{2}{z}dz \Rightarrow c_3 = \frac{x}{z^2} = \phi_3 \end{cases}$$

במקרה זה:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= F\left(\phi_2, \phi_3\right) \\ u &= F\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{z^2}\right) &= u(1, y, z) = y + z^2 \\ F(t_1, t_2) &= \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \\ u(x, y, z) &= \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x} = \frac{y + z^2}{x} \end{aligned}$$

תרגיל ממבחן

כמעט כל מבחן מופיע תרגל מנושא זה ששוה בין 12 ל־25 נקודות ולכן חשוב לדעת נושא זה.

$$\left(y^{2}-u\right)u_{x}+yu_{y} = u$$

פתרון

$$a=y^{2}-u,b=y,c=u$$

$$\frac{dx}{y^{2}-u}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}\Rightarrow c_{1}=\frac{u}{y}=\phi_{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= \frac{dx}{y^{2}-u}\\
dx &= \frac{\left(y^{2}-u\right)dy}{y}\\
dx &= \left(y-c_{1}\right)dy\\
x &= \frac{y^{2}}{2}-u+c_{2}\\
c_{2} &= u+x-\frac{y^{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{F\left(u+x-\frac{y^{2}}{2},\frac{u}{y}\right)=0}$$

$$dx=\frac{\left(\frac{u^{2}}{c_{1}^{2}}-u\right)du}{u}$$

$$dx=\left(\frac{u}{c_{1}^{2}}-1\right)du$$

$$c_{1}^{2}x=\frac{u^{2}}{2}-c_{1}^{2}u+c_{2}$$

$$\frac{u^{2}}{y^{2}}x=\frac{u^{2}}{2}-\frac{u^{3}}{y^{2}}+c_{2}$$

$$x=\frac{y^{2}}{2}-u+\frac{c_{2}y^{2}}{u^{2}}$$

1.2.2 שיטת הקווים האופייניים

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

נבחר משתנים t,s כך ש־$c = u_t(t,s)$.

$$c = u_t(t,s) = x_t u_x + y_t \cdot u_y$$

$$\begin{cases} x_t = & a\,(x,y,u) \Rightarrow x(t,s) \\ y_t = & b\,(x,y,u) \Rightarrow y(t,s) \\ u_t = & c\,(x,y,u) \Rightarrow u(t,s) \end{cases}$$

בנוסף אם יש לנו תנאי התחלה

$$(x_0(s), y_0(s), u_0(s)) = (x(0,s), y(0,s), u(0,s))$$

נציב ב$x(t,s), y(t,s), u(t,s)$ שמצאנו, נמצא את $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$ ונקבל את הפתרון הפרטי.

$$\begin{aligned} x_t &= a\,(x,y,u) \\ y_t &= b\,(x,y,u) \\ u_t &= c(x,y,u) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a\,(x,y,u) \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u) \\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{a} \\ dt &= \frac{dy}{b} \\ dt &= \frac{du}{c} \end{aligned}$$

ומכאן נקבל את שיטת לגרנז'

$$\frac{dx}{a\,(x,y,u)} = \frac{dy}{b\,(x,y,u)} = \frac{du}{c\,(x,y,u)}$$

תרגיל

$$u_x + u_y = 2$$

$$u(x,0) = x^2$$

פתרון

$$a=1,b=1,c=2$$

קו התחלה: $\left(s,0,s^2\right)$.

$$\begin{cases}x_t=1\Rightarrow x(t,s)=t+f_1(s)\\ y_t=1\Rightarrow y(t,s)=t+f_2(s)\\ u_t=2\Rightarrow u(t,s)=2t+f_3(s)\end{cases}$$

נציב את קו ההתחלה:

$$\begin{aligned}s&=x(0,s)=f_1(s)\\ 0&=y(0,s)=f_2(s)\\ s^2&=u(0,s)=f_3(s)\\ x(t,s)&=t+s\\ y(t,s)&=t\\ u(t,s)&=2t+s^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t+s&=x\\ t=y&\Rightarrow x-y\\ u(x,y)&=\boxed{2y+(x-y)^2}\end{aligned}$$

1.2.3 מתי לא יהיה לנו פתרון פרטי?

כאשר היעקוביאן של המשוואה שתלויה בx,y,t,s שווה ל־0. בתרגיל האחרון שפתרנו $J=\det\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=-1\neq0$.

תרגיל

$$u\left(0,y\right)=g(y)\quad u_x=1$$

פתרון

קווים אופיינים:

$$\begin{cases}x_t=1\Rightarrow x(t,s)=t+f_1(s)\\ y_t=0\Rightarrow y(t,s)=f_2(s)\\ u_t=1\Rightarrow u(t,s)=t+f_3(s)\end{cases}$$

קו התחלתי:

$$(0,s,g(s))$$

ו)אתד(

$$\begin{aligned} 0 &= x(0,s)=f_1(s)\\ s &= y(0,s)=f_2(s)\\ g(s) &= u(0,s)=f_3(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\left(t,s\right) &= t\\ y(t,s) &= s\\ u(t,s) &= t+g(s)\Rightarrow u(x,y)=x+g(y)\end{aligned}$$

תרגיל ממבחן

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=4$$

עם תנאי התחלה:

$$\begin{cases} x=0\\ y^2=z\end{cases}$$

פתרון

קווים אופיינים:

$$\begin{cases} x_t=\frac{1}{x}\Rightarrow xdx=dt\Rightarrow\frac{x^2}{2}=t+f_1(s)\\ y_t=\frac{1}{y}\Rightarrow ydy=dt\Rightarrow\frac{y^2}{2}=t+f_2(s)\\ u_t=4\Rightarrow u=4t+f_3(s)\end{cases}$$

קו התחלתי:

$$\left(0,s,s^2\right)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\left[x\left(0,s\right)^2\right]}{2}=f_1(s)\\ \frac{s^2}{2} &= \frac{\left[y(0,s)^2\right]}{2}=f_2(s)\\ s^2 &= u\left(0,s\right)=f_3(s)\end{aligned}$$

נקבל :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2} &= t\\ \frac{y^2}{2} &= t+\frac{s^2}{2}\\ z &= 4t+s^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2 &= y^2-2t, t=y^2-x^2\\ z(x,y) &= 4\cdot\frac{x^2}{2}+y^2-x^2=x^2+y^2\end{aligned}$$

במבחן לפעמים שואלים מה הצורה הגאומטרית. כאן קיבלנו מעגל אליפטי.

2 תרגול 2

2.1 המשך משוואות קוואזי לינאריות

2.1.1 דוגמה נוספת

$$xu\cdot u_x+yu\cdot u_y=xy$$

עם התנאי:

$$u\left(x,\sqrt{x}\right)=0$$

פתרון

$$\frac{dx}{xu}=\frac{dy}{yu}=\frac{du}{xy}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{xu} &= \frac{dy}{yu}\\ \phi=\frac{y}{x} &= c_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{xu} &= \frac{du}{xy}\bigg\backslash\cdot x\\ ydx &= udu\\ xc_1dx &= udx\\ \frac{c_1}{2}x^2 &= u^2+c_2\Rightarrow c_1x^2=u^2+2c_2\Rightarrow yx=u^2+2c_2\end{aligned}$$

$$\phi_2 = c_2 = xy - u^2$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{y}{x}\right) &= xy - u^2 \\ F\left(\frac{y}{y^2}\right) &= x \cdot y = y^2 \\ F\left(\frac{1}{y}\right) &= y^3 \\ F(t) &= \frac{1}{t^3} \\ \frac{x^3}{y^3} &= xy - u^2 \\ u^2 &= \boxed{\frac{xy^4 - x^3}{y^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \cdot uu_y &= 0 \\ u_y &= 0 \Rightarrow u = c \Rightarrow u = 0 \quad \forall y, x = 0 \end{aligned}$$

- הצדקה לפתרון זה:

מציבים $(0,0)$ בפתרון $u(x,y)$ עבור $x = 0$ כלומר $u(0,0) = c$. בנוסף מתנאי ההתחלה ידוע לנו שעבור $x = y^2, u = 0$ לכן $\Leftarrow c = 0 \Leftarrow u(0,y) = 0 \quad \forall y$
$u(0,0) = 0$

2.1.2 שאלות שחוזרות על עצמן במבחנים

.1

$$u_{xx} = 0 \quad u = u(x,y)$$

פתרון:

$$\begin{aligned} u_x &= f_1(y) \\ u &= f_1(y)x + f_2(y) \end{aligned}$$

.2

$$u_{xy} + u_x = 0$$

פתרון: נציב $v=u_x \Leftarrow$

$$\begin{aligned} v_y+v &= 0 \\ \frac{dv}{dt} &= -v \\ \frac{dv}{v} &= -dy \\ \ln|v| &= -y\cdot f_1(x) \\ u_x &= v\cdot f_1(x)=e^{-y}\cdot f_1(x) \\ u(x,y) &= \boxed{e^{-y}\int f_1(x)\,dy+f_2(y)} \end{aligned}$$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=5\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$

(א) פתרון:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 5v \\ \ln|v| &= 5x+f_1(y) \\ v &= e^{5x}\cdot f_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^{5x}f_1(y) \end{aligned}$$

$$\boxed{u=e^{5x}\int f_1(y)\,dy+f_2(x)}$$

2.2 מיון מד"ח מסדר 2

מד"ח מסדר IIהיא מהצורה:

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$$

ישנם שלושה מקרים:

1. משוואה היפרבולית - $\Delta=b^2-ac>0$ והצורה הקנונית היא

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}=f \text{ or } u_{\eta\eta}-u_{\xi\xi}=f$$

2. משוואה פרבולית $\Delta = 0$ והצורה הקנונית היא:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \text{ or } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$$

3. משוואה אליפטית - $\Delta < 0$ והצורה הקנונית היא:

$$u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = F$$

במקרה זה המשוואה האופיינית של מד"ח מסדר II היא:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

תרגיל:

להעביר לצורה קנונית את המשוואה:

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_y = xy^2$$

$$a = x^2, b = -xy, c = y^2$$

$$\Delta = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$$

לכן זו משוואה פרבולית.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy \pm \sqrt{0}}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

$$xy = c_1 = \eta$$

נבחר $\eta(x,y) = xy$ ונבחר ξ כרצוננו כך ש:

$$\begin{vmatrix} \eta_x & \eta_y \\ \xi_x & \xi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

אם נבחר $\xi = x$, נקבל

$$\begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x \neq 0$$

עבור $x \neq 0$, נבדוק בסוף עבור $x = 0$. (תרגיל חשוב לאחד מהמועדים).

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\eta \eta_x + u_\xi \xi_x = yu_\eta + u_\xi \\
u_{xx} &= (u_{\eta\eta})\, y + (u_{\eta\xi} \cdot \xi_x)\, y + (u_{\xi\eta} \cdot \eta_x + u_{\xi\xi}\xi_x) = u_{\eta\eta}y^2 + 2yu_{\eta\xi} + u_{\xi\xi} \\
u_y &= u_\eta \cdot u_\xi = x \cdot u_\eta \\
u_{yy} &= x\,(u_{\eta\eta} \cdot \eta_y) = x^2 u_{\eta\eta} \\
u_{xy} &= u_\eta + x\,(u_{\eta\eta}\eta_x + u_{\xi\xi}\xi_x) = u_\eta + xyu_{\eta\eta} + xu_{\eta\xi}
\end{aligned}$$

נציב במשוואה המקורית:

$$x^2\left(u_{\eta\eta}y^2+2yu_{\eta\xi}+u_{\xi\xi}\right)-2xy\left(u_\eta+xyu_{\eta\xi}+xu_{\eta\xi}\right)+y^2x^2u_{\eta\eta}+x^2u_\eta=xy^2$$

$$\begin{aligned}x^2u_{\xi\xi}+u_\eta\left(x^2-2xy\right) &= xy^2\\ \xi^2u_{\xi\xi}+u_\eta\left(\xi^2-2\eta\xi\right) &= \eta^2\end{aligned}$$

תרגיל

$$yu_{xx}+u_{yy}=0$$

$$a=y,b=0,c=1$$

$$\Delta=b^2-ac=-y$$

עבור $y<0$ זו משוואה היפרבולית ועבור $y>0$ אליפטית.

$$y=0\Rightarrow u_{yy}=0$$

- מקרה א' $\Delta>0$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\pm\sqrt{-y}}{y}=(-y)^{-1/2}\\ (i)\quad\frac{dy}{dx} &= (-y)^{-0.5}\\ dx &= \frac{dy}{(-y)^{-0.5}}\\ (-y)^{0.5}dy &= dx\\ c_1 &= \frac{2}{3}(-y)^{1.5}+x\\ (ii)\quad\frac{dy}{dx} &= -(-y)^{-0.5}\\ \frac{dy}{(-y)^{-0.5}} &= -dx\\ (-y)^{0.5}dy &= dx\\ c_2 &= \frac{2}{3}(-y)^{1.5}-x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{2}{3}(-y)^{1.5} - x \\
\xi &= \frac{2}{3}(-y)^{1.5} + x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{vmatrix} -1 & (-y)^{0.5} \\ 1 & -(-y)^{0.5} \end{vmatrix} = 2(-y)^{0.5} - (-y)^{0.5} = (-y)^{0.5} \neq 0
$$

נתחיל במציאת u_x:

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_\eta \cdot \eta_x + u_\xi \xi_x = u_\eta + u_\xi \\
u_{xx} &= -u_{\eta\eta} \cdot \eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\xi\xi}\xi_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_y &= u_\eta \eta_y + u_\xi \xi_y = (-y)^{0.5}(u_\eta + u_\xi) \\
u_{yy} &= \frac{1}{2}(-y)^{-0.5}(u_\eta + u_\xi) - (-y)^{0.5}\left[(u_{\eta\eta} \cdot \eta_y + u_{\eta\xi} \cdot \xi_y) + (u_{\xi\eta} \cdot \eta_y + u_{\xi\xi}\xi_y)\right] \\
&= \frac{1}{2}(-y)^{0.5}(u_\eta + u_\xi) - y(u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi})
\end{aligned}
$$

נציב במשוואה המקורית:

$$
y\left[u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} - 2u_{\eta\xi}\right] + \frac{1}{2}(-y)^{0.5}(u_\eta + u_\xi) - y(u_{\eta\eta} + 2u_{\eta\xi} + u_{\xi\xi}) = 0
$$

$$
\frac{1}{2}(-y)^{-0.5}(u_\eta + u_\xi) - 4yu_{\eta\xi} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(-y)^{0.5}y}(u_\eta + u_\xi)\right) &= = u_{\eta\xi} \\
-\frac{1}{8}\frac{u}{3(\eta+\xi)}(u_\eta + u_\xi) &= u_{\eta\xi}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{-(u_\eta + u_\xi)}{6(\eta+\xi)} = u_{\eta\xi}}
$$

- מקרה ב' $y > 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\pm\sqrt{-y}}{y} = \frac{\pm\sqrt{y}}{y} = \pm i y^{-0.5} \\
\frac{dy}{dx} &= i y^{-0.5} \Rightarrow y^{0.5} dy = i \cdot dx \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{3}{y^2} = 1 + x + c_1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -i\cdot y^{-0.5}\Rightarrow y^{0.5}dy=-idx\Rightarrow \frac{2}{3}y^{1.5}-ix+c_2\\ c_{1,2} &= \frac{2}{3}y^{1.5}\pm ix=a\pm bi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta &= a=\frac{2}{3}y^{1.5}\\ \xi &= b=x\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}0 & y^{0.5}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-y^{0.5}\underset{y\neq 0}{\neq}0$$

$$\begin{aligned}u_x &= u_\eta\cdot\eta_x+u_\xi\cdot\xi_x=u_\xi\\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\\ u_y &= u_\eta\cdot\eta_y+u_\xi\xi_y=y^{0.5}u_\eta\end{aligned}$$

$$u_{yy}=\frac{1}{2}y^{-0.5}u_\eta+y^{0.5}\left(u_{\eta\eta}\eta_y+u_{\eta\xi}\xi_y\right)=\frac{1}{2}y^{-0.5}u_\eta+yu_{\eta\eta}$$

נציב בחזרה במשוואה:

$$\begin{aligned}yu_{\xi\xi}+\frac{1}{2}y^{-0.5}u_\eta+yu_{\eta\eta} &= 0\\ y\left(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}\right) &= -\frac{1}{2}y^{-0.5}u_\eta\\ 3\eta\left(u_{\eta\eta}+u_{\xi\xi}\right) &= -u_\eta\end{aligned}$$

$$\boxed{u_{\eta\eta}+u_{\xi\xi}=-\frac{u_\eta}{3\eta}}$$

3 תרגול 3

3.1 משוואת הגלים החד מימדית

צורת המשוואה:

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

עבור $-\infty<x<\infty, t>0$ עם תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}u(x,0) &= f(x)\\ u_t(x,0) &= F(x)\end{aligned}$$

נוסחת דלמבר:

$$u\left(x,t\right)=\frac{f\left(x-at\right)+f\left(x+at\right)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(s)ds$$

תרגיל:

$$\begin{aligned}u_{tt}-4u_{xx} & = 0\\ u_{t}\left(x,0\right) & = x\\ u\left(x,0\right) & = \sin2x\end{aligned}$$

פיתרון

במשוואה $\underline{c=2,f\left(x\right)=\sin2x,g\left(x\right)=x}$.

$$\begin{aligned}\frac{f\left(x+2t\right)+f\left(x-2t\right)}{2}+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}sds & = \frac{\sin\left(2\left(x+2t\right)\right)+\sin\left(2\left(x-2t\right)\right)}{2}+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}sds\\ & = \frac{2\sin\left(\frac{2x+4t+2x-4t}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+4t-2x+4t}{2}\right)}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{s^{2}}{2}\Big|_{x-2t}^{x+2t}\\ & = \sin\left(2x\right)\cos4t+\frac{1}{8}\left(\left(x+2t\right)^{2}-\left(x-2t\right)^{2}\right)\\ & = \sin2x\cos4t+xt\end{aligned}$$

-

תרגיל

$$\begin{aligned}u_{tt}-9u_{xx} & = 0\\ u\left(x,0\right) & = \begin{cases}1 & \left|x\right|\leq2\\ 0 & \left|x\right|>2\end{cases}\\ u_{t}\left(x,0\right) & = \begin{cases}1 & \left|x\right|\leq2\\ 0 & \left|x\right|>2\end{cases}\end{aligned}$$

1. חשב את $u\left(0,{}^{1}/_{6}\right)$.
2. מצא את $u\left(x,t\right)$ באופן כללי.
3. עבור $x_{0}\in\mathbb{R}$ קבוע חשבו את $\lim_{t\to\infty}u\left(x_{0},t\right)$.

פיתרון

1. $u(x,t)=\frac{f(x+3t)+f(x-3t)}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}g(s)\,ds$. נציב $x=0,t=1/6$.

$$\begin{aligned} u\left(0,\frac{1}{6}\right) &= \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{1}{6}\int_{-0.5}^{0.5}g(s)\,ds \\ &= \frac{1+1}{2}+\frac{1}{6}\int_{-0.5}^{0.5}ds=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6} \end{aligned}$$

2. נחלק למקרים:

(א) מקרה I: $x-3t<x+3t<-2$ לכן $u(x,t)=0$.

(ב) מקרה II: $x-3t<-2\le x+3t\le 2$.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\int_{-2}^{x+3t}ds=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(x+3t+2)$$

(ג) מקרה III: $x-3t<-2, x+3t>2$.

$$u(x,t)=0+\frac{1}{6}\int_{-2}^{2}ds=\frac{2}{3}$$

(ד) מקרה IV: $x-3t, x+3t\in[-2,2]$.

$$u(x,t)=\frac{1+1}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}ds=1+t$$

(ה) מקרה V: $-2<x-3t<2<x+3t$:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{2}ds=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\int(2+3t-x)$$

(ו) מקרה IV: $2<x-3t<x+3t$. ע"ע מקרה I.

3. x_0 קבוע, $t\to\infty$. באיזה מקרה נמצאים?

$$\begin{aligned} x_0+3t &\to \infty \\ x-3t &\to -\infty \end{aligned}$$

לכן, נמצאים במקרה 3 ונקבל ש:

$$\lim_{t\to\infty}u(x_0,t)=2/3$$

תרגיל

$$\begin{cases}u_{tt}-c^{2}u_{xx}=0\\u\left(x,1\right)=f\left(x\right)\\u_{t}\left(x,1\right)=g\left(x\right)\end{cases}$$

פתרון

$$w\left(x,t\right)=u\left(x,t+1\right)$$

נקבל עבור w משואה חדשה,

$$\begin{cases}w_{tt}-c^{2}w_{xx}=0\\w\left(x,0\right)=f\left(x\right)\\w_{t}\left(x,0\right)=g\left(x\right)\end{cases}$$

$$w\left(x,t\right)=\frac{f\left(x+ct\right)+f\left(x-ct\right)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g\left(s\right)ds$$

$$u\left(x,t\right)=w\left(x,t-1\right)=\frac{f\left(x+c\left(t-1\right)\right)+f\left(x-c\left(t-1\right)\right)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-1)}^{x+c(t+1)}g\left(s\right)ds$$

3.1.1 פתרון כללי של משוואות לא הומוגניות של מיתר אינסופי

$$\begin{cases}u_{tt}-c^{2}u_{xx}=G\left(x,t\right)\\u\left(x,0\right)=f\left(x\right)\\u_{t}\left(x,0\right)=g\left(x\right)\end{cases}$$

פתרון כללי

$$u\left(x,t\right)\quad=\quad\frac{f\left(x-ct\right)+f\left(x+ct\right)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g\left(s\right)ds+\frac{1}{2c}\int_{0}^{t}d\eta\int_{x-c(t-\eta)}^{x+c(t+\eta)}G\left(s,\eta\right)ds$$

תרגיל

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}+2e^{-x}\sin t=0\\u\left(x,0\right)=\sin x\\u_{t}\left(x,0\right)=1\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= -2e^{-x}\sin t \\
c &= 1 \\
G(x,t) &= -2e^{-x}\sin t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_h(x,t) &= \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds \\
&= \frac{\sin(x+t)+\sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} ds \\
&= \sin(x)\cos(t) + t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_g(x,t) &= \frac{1}{2}\int_0^t d\eta \int_{x-(t-\eta)}^{x+(t-\eta)} \left(-2e^{-s}\sin q\right) ds \\
&= -\int_0^t \sin\eta d\eta \cdot \int_{x-(t-\eta)}^{x+(t-\eta)} e^{-s} ds \\
&= \int_0^t \sin\eta \left[e^{-s}\right]_{x-t+\eta}^{x+t-\eta} dq \\
&= \int_0^t \sin\eta \left(e^{-x-t+\eta} - e^{-x+t-\eta}\right) d\eta \\
&= e^{-x}\int_0^t \sin\eta \left(e^{\eta-t} - e^{-\eta+t}\right) d\eta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax}\sin bx dx &= \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} \\
\int e^{\eta}\sin\eta d\eta &= \frac{e^{\eta}\left(\sin\eta - \cos\eta\right)}{2} \\
\int e^{-\eta}\sin\eta d\eta &= \frac{-e^{-\eta}\left(\sin\eta + \cos\eta\right)}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_g(x,t) &= e^{-x}\left[e^{-t}\frac{e^{\eta}\left(\sin\eta - \cos\eta\right)}{2} + e^{t}\cdot\frac{e^{-\eta}\left(\sin\eta + \cos\eta\right)}{2}\right] \\
&= e^{-x}\left[\frac{e^{\eta-t} + e^{-(\eta-t)}}{2}\sin\eta - \frac{e^{\eta-t} - e^{-(\eta-t)}}{2}\cos\eta\right] \\
&= e^{-x}\left[\cosh(\eta-t)\sin\eta - \sinh(\eta-t)\cos\eta\right]_0^t \\
&= e^{-x}\left[\sin t + \sinh t\right]
\end{aligned}
$$

$$u(x,t)=u_h(x,t)+u_g(x,t)$$

$$=\boxed{\sin(x)\cos(t)+t+e^{-x}\left[\sin t+\sinh t\right]}$$

3.1.2 משוואת גלים הומוגנית למיתר סופי

תרגיל:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & 0<x<\pi,t>0\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t\geq 0\\ u(x,0)=\sin^3 x & 0\leq x\leq\pi\\ u_t(x,0)=\sin 2x & 0\leq x\leq\pi \end{cases}$$

פתרון

$$\begin{aligned} u(x,t) &= X_{(x)}\cdot T(t)\\ \frac{X''}{X} &= \frac{T''}{T}=-\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X''+\lambda X &= 0\\ u(0,t) &= X(0)\cdot T(t)=0\Rightarrow X(0)=0\\ u(\pi,t) &= X(\pi)\cdot T(t)=0\Rightarrow X(\pi)=0 \end{aligned}$$

- $T(t)$ לא טריוויאלי ולכן קיימת נקודה t עבורה $T(t)\neq 0$

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$$

:<u>$\lambda=0$</u>

$$\begin{aligned} X'' &= 0\\ X(x) &= ax+b\\ X(0) &= 0\Rightarrow b=0\\ X(\pi) &= 0\Rightarrow a=0 \end{aligned}$$

פתרון טריוויאלי.

:$\underline{\lambda < 0}$

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0\\
r^2 + \lambda &= 0\\
r &= \pm i\sqrt{\lambda}\\
X(x) &= ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}\\
X(0) &= a + b = 0\\
X(\pi) &= ae^{\sqrt{-\lambda}\pi} + be^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \Rightarrow a = b = 0
\end{aligned}$$

פתרון טריוויאלי.

$\underline{\lambda > 0}$

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda x &= 0\\
r^2 + \lambda &= 0\\
r &= \pm i\sqrt{\lambda}\\
X(x) &= \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + b\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)\\
X(0) &= b = 0\\
X(\pi) &= a\sin\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0\\
\Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) &= 0\\
\sqrt{\lambda}\pi &= \pi n\\
\lambda &= n^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T''}{T} &= -n^2\\
T(t) &= A\cos(nt) + B\sin(nt)\\
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos(kt) + B\sin(kt)\right]\sin(kx)\\
u(x,0) &= \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\\
u_t(x,0) &= \sin 2x\\
\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx &= \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\\
A_k &= \begin{cases} 0.75 & k = 1\\ -0.25 & k = 3\\ 0 & k \neq 1,3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} kB_k \sin kx = \sin 2x$$

$$B_k = \begin{cases} 1/2 & k=2 \\ 0 & k\neq 2 \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{3}{4}\cos t\sin x - \frac{1}{4}\cos 3t\sin 3t + \frac{1}{2}\cos 2t\sin 2x}$$

4 תרגול 4

4.1 דוגמאות מהמבחנים לשאלות הוכחה בנוגע למשוואת הגלים ההומוגנית

4.1.1 ניסוח

חשוב לנסח כהלכה:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 a_{xx} = 0 & t>0, 0<x<L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t>0 \\ u(x,0) = f(x) & 0\leq x\leq L \\ u_t(x,0) = g(x) & 0\leq x\leq L \end{cases}$$

4.1.2 הוכחה

נניח שפתרון המשוואה הוא מהצורה

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

נציב בחזרה במשוואה לקבל:

$$\frac{T\prime\prime}{c^2T} = \frac{x\prime\prime}{X}$$

כ"א מהצדדים תלוי במשתנה שונה ולכן הם שווים לקבוע:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2T} = -\lambda$$

נסתכל על תנאי השפה שלנו:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)\cdot T(t) = 0 \\ u(L,t) &= X(L)\cdot T(t) = 0 \end{aligned}$$

מאחר ואנו מחפשים פיתרון ל"ט, קיים t עבורו $T(t)\neq 0$ ולכן נקבל:

$$X(0) = X(L) = 0$$

לכן, קיבלנו בעיית שטורם ליוביל עבור $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

נחלק למקרים עבור λ:

• מקרה 1: $\lambda=0$

$$\begin{aligned} X''(x) &= 0\\ X\prime(x) &= a\\ X(x) &= ax+b \end{aligned}$$

נציב תנאי שפה

$$\begin{aligned} X(0) &= b=0\\ X(L) &= aL+b=0\\ &\Rightarrow a=b=0 \end{aligned}$$

קיבלנו פתרון טריויאלי:

• מקרה 2: $\lambda<0$. לשם נוחות נסמן $\mu=-\lambda$

$$\begin{aligned} X''-\mu X &= 0\\ r^2-\mu &= 0\\ r &= \pm\sqrt{\mu}\\ X(x) &= ae^{\sqrt{\mu}x}+be^{-\sqrt{\mu}x} \end{aligned}$$

נציב תנאי שפה:

$$\begin{aligned} X(0) &= a+b=0\\ X(L) &= ae^{\sqrt{\mu}L}+be^{-\sqrt{\mu}L}=0 \end{aligned}$$

נבדוק את הדטרמיננטה:

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ e^{\sqrt{\mu}L} & e^{-\sqrt{\mu}L} \end{array}\right| = e^{-\sqrt{\mu}L}-e^{-\sqrt{\mu}L}\neq 0 \quad (\mu\neq 0)$$

לכן קיים פיתרון אחד ויחיד למערכת המשוואות $a=b=0$ פיתרון טריוויאלי.

• מקרה 3: $\lambda>0$:

$$\begin{aligned} \lambda''+\lambda x &= 0\\ r^2+\lambda &= 0\\ r &= \pm i\sqrt{\lambda}\\ X(x) &= a\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+b\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \end{aligned}$$

נציב תנאי שפה:

$$\begin{aligned} X(0) &= a=0\\ X(L) &= a\cos\left(\sqrt{\lambda}L\right)+b\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right)=0\Rightarrow b\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right)=0 \end{aligned}$$

מאחר ומחפשים פיתרון לא טריוויאלי, ניתן להניח $b \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) &= 0\\
\sqrt{\lambda}L &= \pi k \quad k\in\mathbb{Z}\\
\sqrt{\lambda} &= \frac{\pi k}{L}\\
\lambda &= \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2
\end{aligned}$$

משיקולי סימטריה הפונקציות העצמיות והערכים העצמיים עבור $X\left(x\right)$ הן:

$$\begin{aligned}
X_k\left(x\right) &= \sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right) \quad k=1,\ldots,\infty\\
\lambda_k &= \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2
\end{aligned}$$

נשאר לפתור את המשוואה עבור $T\left(t\right)$:

$$\begin{aligned}
T_k''\left(t\right)+c^2\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 T_k\left(t\right) &= 0\\
r^2+\left(\frac{c\pi k}{L}\right)^2 &= 0\\
r &= \pm i\frac{c\pi k}{L}\\
T_k\left(t\right) &= a_k\cos\left(\frac{c\pi kt}{L}\right)+b_k\sin\left(\frac{c\pi kt}{L}\right)
\end{aligned}$$

נרשום את הצורה הכללית של הפתרון:

$$\begin{aligned}
u\left(x,t\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}X_k\left(x\right)\cdot T_k\left(t\right)=\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{c\pi kt}{L}\right)+b_k\sin\left(\frac{c\pi kt}{L}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)
\end{aligned}$$

נשאר לנו לבטא את a_k,b_k באמצעות תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}
u\left(x,0\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)=f\left(x\right)\\
u_t\left(x,0\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c\pi k}{L}b_k\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)=g\left(x\right)
\end{aligned}$$

עפ"י פיתוח $f(x), g(x)$ עבור סינוסים נקבל:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi k\lambda}{L}\right)dx \\ b_n &= \frac{2}{\pi kc}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)dx \end{aligned}$$

בסה"כ הנוסחה לפתרון המשוואה:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{\pi kt}{L}\right)+b_k\sin\left(\frac{c\pi kt}{L}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)$$

כאשר:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)dx \\ b_k &= \frac{2}{\pi kc}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{L}\right)dx \end{aligned}$$

מ.ש.ל.

4.1.3 משוואת מיתר אינסופי הומוגנית - המשפט

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx} &= 0 \quad t>0, x\in\mathbb{R} \\ u(x,0) &= f(x) \quad x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= g(x) \quad x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

הוכחה

נעביר לצורה קנונית:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm\frac{\sqrt{a^2}}{1}=\pm a \\ dx &= \pm a dt \\ x &= \pm at+c_{1,2} \end{aligned}$$

$$c_{1,2}=x\pm at$$

לכן, נבחר משתנים:

$$\begin{aligned} \eta &= x+at \\ \xi &= x-at \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\eta \eta_x + u_\xi \xi_x = u_\xi + u_\eta \\
u_{xx} &= u_{\eta\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\xi\xi}\xi_x \\
&= u_{\eta\eta} + 2u_{\eta\xi} + u_{\xi\xi} \\
u_t &= u_\eta \cdot \eta_t + u_\xi \xi_t = a\left(u_\eta - u_\xi\right) \\
u_{tt} &= a\left(u_{\eta\eta}\eta_t + u_{\eta\xi}\xi_t - u_{\xi\eta}\eta_t - u_{\xi\xi}\xi_t\right) \\
&= a^2\left(u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}\right)
\end{aligned}$$

מה שקיבלנו

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= u_{\eta\eta} + 2u_{\eta\xi} + u_{\xi\xi} \\
u_{tt} &= a^2\left(u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}\right)
\end{aligned}$$

נציב בחזרה במשוואה המקורית לקבל:

$$\begin{aligned}
a^2\left(u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} - 2u_{\eta\xi}\right) - a^2\left(u_{\eta\eta} + 2u_{\eta\xi} + u_{\xi\xi}\right) &= 0 \\
-4a^2 u_{\eta\xi} &= 0 \Rightarrow u_{\eta\xi} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{\eta\xi} &= 0 \Rightarrow u_\xi = f\left(\xi\right) \\
u\left(\eta,\xi\right) &= F\left(\eta\right) + G\left(\xi\right)
\end{aligned}$$

נחזור ל-x, t:

$$u\left(x,t\right) = F\left(x+at\right) + G\left(x-at\right)$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}
u\left(x,0\right) &= F\left(x\right) + G\left(x\right) = f\left(x\right) \\
u_t\left(x,0\right) &= aF'\left(x\right) - aG'\left(x\right) = g\left(x\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} F\left(x\right) + G\left(x\right) = f\left(x\right) \\ aF'\left(x\right) - aG'\left(x\right) = g\left(x\right) \end{cases}$$

$$F'\left(x\right) - G'\left(x\right) = \frac{1}{a} g\left(x\right)$$

$$F\left(x\right) - G\left(x\right) = \frac{1}{a}\int_0^x g\left(s\right) ds$$

$$F\left(x\right) + G\left(x\right) = f\left(x\right)$$

$$\begin{aligned} 2F(x) &= f(x) + \frac{1}{a}\int_0^x g(s)\,ds \\ F(x) &= \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x g(s)\,ds \\ G(x) &= \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x g(s)\,ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} g(s)\,ds + \frac{f(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} g(s)\,ds \\ &= \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= u_x(L,t) = 0 \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 \end{aligned}$$

תנאי נוימן ודיריכלה בהתאמה.

5 תרגול 5

5.0.4 משוואת גלים הומוגנית על מיתר אינסופי

תרגיל

$$\begin{cases} u_{tt} - 16u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 3 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,3) = x \\ u_t(x,3) = 4\sin 5x - 2\sin 3x \end{cases}$$

פתרון

נשתמש בביטוי $t-3$ במקום t : נגדיר פונקציה $v(x,t) = u(x,t+3)$.

$$\begin{cases} v_{tt} - 16v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = x \\ v_t(x,0) = 4\sin 5x - 2\sin 3x \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\left[A_n \cos 4nt + B_n \sin 4nt\right] \\
v(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = x \\
A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n}dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\pi\frac{\cos \pi n}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right) = -\frac{2}{n}(-1)^n \\
v_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} 4n \sin(nx)\, B_n = 4\sin 5x - 2\sin 3x \\
B_n &= \begin{cases} -1/6 & n=3 \\ 1/5 & n=5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)\cos(4nt) - \frac{1}{6}\sin 12t \sin 3x + \frac{1}{5}\sin 20t \sin 5x
$$

נחזור ל-u:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \cos(4n(t-3)) - \frac{1}{6}\sin 12(t-3)\sin 3x \\
&\quad + \frac{1}{5}\sin 20(t-3)\sin 5x
\end{aligned}
$$

5.0.5 משוואת גלים במיתר סופי לא הומוגנית

תרגיל

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} + u &= 0 \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= 0 \\
u_t(x,0) &= 1 + \cos^2 x \\
u_x(0,t) &= u_x(\pi,t) = 0
\end{aligned}
$$

פתרון:

$$
u(x,t) = X(x)\,T(t) \Rightarrow X'(0) = X'(\pi) = 0
$$

ולכן

$$\begin{aligned}
T''X-X''T+XT &= 0\\
\left(T+T''\right)X &= X''T\\
\frac{T''+T}{T} &= \frac{X''}{X}=-\lambda
\end{aligned}$$

:$\underline{\lambda=0}$

$$\begin{aligned}
X'' &= 0\\
X\left(x\right) &= ax+b\\
X'\left(0\right)=X'\left(\pi\right) &= a=0
\end{aligned}$$

ולכן $X\left(x\right)=b$ לא טריוויאלי.
עבור $\underline{\lambda<0}$:

$$\begin{aligned}
X''+\lambda X &= 0\\
k^{2}+\lambda &= 0\\
k &= \pm\sqrt{-\lambda}\\
X\left(x\right) &= ae^{\sqrt{-\lambda}x}+be^{\sqrt{-\lambda}x}\\
X'\left(0\right) &= a\sqrt{-\lambda}+b\sqrt{-\lambda}=0\Rightarrow a=b\\
X'\left(\pi\right) &= a\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-be^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=0\\
\Rightarrow b\left(\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-b\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) &= 0\\
\Rightarrow b\left(\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\pi}-\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) &= 0\\
\Rightarrow b=0 &\Rightarrow a=b=0
\end{aligned}$$

כעת עבור $\underline{\lambda>0}$:

$$\begin{aligned}
X''+\lambda X &= 0\\
k^{2}+\lambda &= 0\\
k &= \pm i\sqrt{\lambda}\\
X\left(x\right) &= a\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\\
X'\left(0\right) &= \sqrt{\lambda}B=0\Rightarrow B=0\\
X'\left(\pi\right) &= -\sqrt{\lambda}A\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0\\
&\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)=0\\
\lambda &= n^{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= n^2, X_n(x) = \cos nx \\
T_n'' + T_n + \lambda_n T_n &= 0 \\
T_n'' + \left(1+n^2\right) T_n &= 0 \\
k^2 + \left(1+n^2\right) &= 0 \\
k &= \pm i\sqrt{1+n^2} \\
T_n(t) &= A_n \cos\left(\sqrt{1+n^2}t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{1+n^2}t\right) \\
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos nx \left[A_n \cos\left(\sqrt{1+n^2}t\right) + B_n \sin\left(\sqrt{1+n^2}t\right)\right] \\
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx = 0 \Rightarrow A_n = 04 \\
u_t(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{1+n^2} B_n \cos nx = 1 + \cos^3 x = 1 + \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x
\end{aligned}
$$

$$
B_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \frac{3}{4\sqrt{2}} & n=1 \\ \frac{1}{4\sqrt{10}} & n=3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}
$$

$$
u(x,t) = \sin t + \frac{3}{4\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t \cos x + \frac{1}{4\sqrt{10}} \sin\sqrt{10}t \cos 3x
$$

5.0.6 משוואת גלים לא הומוגנית $\left(u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)\right)$

תרגיל

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= xt \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \\
u(x,0) &= \sin 4x \\
u_t(x,0) &= \sin 3x
\end{aligned}
$$

נמצא פתרון שהוא הסכום:

$$
u = u_h + u_p
$$

$$
\begin{cases} u_{htt} - u_{hxx} = 0 \\ u_h(0,t) = u_h(\pi,t) = 0 \\ u_h(x,0) = \sin 4x \\ u_{ht}(x,0) = \sin 3x \end{cases}
$$

$$\begin{aligned}
u_h(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left[A_n \cos nt + B_n \sin nt\right] \\
u_h(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = \sin 4x \\
\Rightarrow A_n &= \begin{cases} 1 & n=4 \\ 0 & n \neq 4 \end{cases} \\
u_{ht}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin nx = \sin 3x \\
B_n &= \begin{cases} 1/3 & n=3 \\ 0 & n \neq 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_h(x,t) &= \sin 4x \cos 4t + \frac{1}{3} \sin 3x \sin 3t \\
u_{ptt} - u_{pxx} &= xt = f(x,t) \\
u_p(0,t) &= u_p(\pi,t) = 0 \\
u_p(x,0) &= u_{pt}(x,0) = 0
\end{aligned}$$

כדי למצוא את u_p נפתח את u_p ו$f(x,t)$ לטור סינוסים ביחס ל$-x$.

$$\begin{aligned}
f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin nx = xt \\
q_n(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} xt \sin nx dx = \cdots = \frac{2t}{n} (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_p(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \sin nx \\
\sum_{n=1}^{\infty} \left[h_n'' + n^2 h_n\right] \sin nx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \\
\Rightarrow h_n'' + n^2 h_n &= \frac{2t(-1)^{n+1}}{n} \\
h_n(0) &= h_n'(0)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_n'' + n^2 h_n &= 0 \\
k^2 + n^2 &= 0 \\
k &= \pm in \\
h_n(t) &= a_n \cos(nt) + b_n \sin nt
\end{aligned}$$

עבור פתרון פרטי ננחש

$$\begin{aligned}
h_n(t) &= a_n t + b_n \\
n^2 a_n t + b_n n^2 &= \frac{2t(-1)^{n+1}}{n} \\
a_n &= \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}, b_n = 0
\end{aligned}$$

ובהס"כ נקבל:

$$\begin{aligned}
h_n(t) &= A_n \cos nt + B_n \sin nt + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1} \\
h_n'(0) &= B_n + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1} = 0 \Rightarrow B_n = \frac{2}{n^3}(-1)^n \\
h_n(0) &= nA_n = 0 \Rightarrow A_n = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_n(t) &= \frac{2(-1)^n}{n^4}\sin nt - \frac{2(-1)^n}{n^3}t \\
u_p(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^4}\sin nt - \frac{2(-1)^n}{n^3}t\right]\sin nx \\
u(x,t) &= u_h(x,t) + u_p(x,t)
\end{aligned}$$

תרגיל

$$\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= \cos 2\pi x \cos 2\pi t \qquad 0 < x < 1, t > 0 \\
u_x(0,t) = u_x(1,t) &= 0 \\
u(x,0) &= \cos^2 \pi x \\
u_t(x,0) &= 2\cos 2\pi x
\end{aligned}$$

פתרון

$$\begin{aligned}
u &= u_h + u_p \\
u_{htt} - u_{hxx} &= 0 \\
u_{hx}(0,t) &= u_{hx}(1,t) = 0 \\
u_h(x,0) &= \cos^2(\pi x) \\
u_{ht}(x,0) &= 2\cos(2\pi x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_h(x,t) &= \frac{A_0+B_0t}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\pi nx\left[A_n\cos\pi nt+B_n\sin\pi nt\right] \\
u_h(x,0) &= \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\pi nx=\cos^2\pi nx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\pi x \\
A_n &= \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0.5 & n=2 \\ 0 & n\neq 0,2 \end{cases} \\
u_{ht}(x,0) &= \frac{B_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\pi nB_n\cos\pi nx=2\cos(2\pi x) \\
B_n &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} & n=2 \\ 0 & n\neq 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_h(x,t) &= \frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi t)+\frac{1}{\pi}\sin 2\pi t\right]\cos 2\pi x \\
u_{ptt}-u_{pxx} &= \cos 2\pi x\cos 2\pi t \\
u_{px}(0,t) &= u_{px}(1,t)=0 \\
u_p(x,0) &= u_{pt}(x,0)=0
\end{aligned}
$$

$$
u_p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)\cos\pi nx+\frac{h_0(t)}{2}+\frac{h_0''}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[h_n''+\pi^2n^2b_n\right]\cos\pi nx=\cos 2\pi x\cos 2\pi t
$$

$$
\begin{cases} h_0''=0 & \\ h_n''+\pi^2n^2h_n=0 & n\neq 2 \\ h_2''+4\pi^2h_2=\cos 2\pi k & \end{cases}
$$

$$
h_n(0)=h_n'(0)=0
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & h_n(t)=0\quad\forall n\neq 2 \\
& \begin{cases} h_2''+4\pi^2h_2=\cos 2\pi t \\ h_2(0)=h\prime_2(0)=0 \end{cases} \\
& h_2''+4\pi^2h_2=0 \\
& k^2+4\pi^2=0 \\
& k=\pm 2\pi i \\
& h_2(t)=A\sin(2\pi t)+B\cos(2\pi t)
\end{aligned}
$$

ננחש

$$\begin{aligned}
h_2(t) &= (A+Bt)\sin 2\pi t + (C+Dt)\cos 2\pi t\\
A &= C = D = 0\\
B &= \frac{1}{4\pi}\\
h_2(t) &= c_1\cos 2\pi t + c_2 \sin 2\pi t + \frac{t}{4\pi}\sin 2\pi t\\
h_2(0) &= c_1 = 0\\
h_2'(0) &= 2\pi c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0\\
h_2(t) &= \frac{t}{4\pi}\sin 2\pi t\\
u_p(x,t) &= \frac{t}{4\pi}\sin 2\pi t \cos 2\pi x\\
u(x,t) &= u_h(x,t) + u_p(x,t)
\end{aligned}$$

6 תרגול 6

תרגיל ממבחן

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u\\ u(x,0) = \sin 2x\\ u_t(x,0) = \sin x\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

פתרון

נציב $u = XT$ ונקבל

$$\begin{aligned}
XT'' - X''T + XT &= 0\\
X(T''+T) - x''T &= 0 \qquad X(0) = X(\pi) = 0\\
\frac{X''}{X} &= \frac{T''+T}{T} = \lambda
\end{aligned}$$

עבור $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0 \\
r^2 + \lambda &= 0 \\
r &= \pm\sqrt{\lambda} \\
X(x) &= A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\
X(0) &= A = 0 \\
X(\pi) &= B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\
B &\neq 0 \\
\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi &= 0 \\
\sqrt{\lambda}\pi &= \pi n \\
\lambda_n &= n^2 \\
T_n'' + T_n &= -n^2 T_n \\
T_n'' + \left(1 - n^2\right) T_n &= 0 \\
r^2 + \left(1 + n^2\right) &= 0 \\
r &= \pm\sqrt{1+n^2} \\
T_n(t) &= A_n\cos\left(\sqrt{1+n^2}t\right) + B_n\sin\left(\sqrt{1+n^2}t\right) \\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\left(A_n\cos\left(\sqrt{1+n^2}t\right) + B_n\sin\left(\sqrt{1+n^2}t\right)\right) \\
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = \sin nx \\
A_n &= \begin{cases} 1 & n = 2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases} \\
su_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1+n^2} B_n \sin nx = \sin x \\
B_n &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases} \\
u(x,t) &= \cos\left(\sqrt{5}t\right)\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\sin x
\end{aligned}$$

6.1 משוואות חום

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

במקרה זה הפתרון הכללי הוא:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) e^{-\left({c\pi k}/{L}\right)^2 t} \\ b_k &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \end{aligned}$$

תרגיל

$$\begin{cases} u_t - 17u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le {\pi}/{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases} \end{cases}$$

פתרון

נניח ש$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$.

$$\begin{aligned} XT' - 17X''T &= 0 \\ \frac{T'}{17T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0 \\
r^2 + \lambda &= 0 \\
r &= \pm i\sqrt{\lambda} \\
X(x) &= A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\
X(0) &= A = 0 \\
X(\pi) &= B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\
B &\neq 0 \\
\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) &= 0 \\
\lambda_n &= n^2 \\
T'_n &= -17n^2 T_n \\
T_n &= A_n e^{17n^2 t} \\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-17n^2 t}\sin(nx) = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \\
A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin nx dx = \frac{4}{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}\bigg|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + (-1)^{n+1}\right) e^{-17n^2 t}\sin nx
\end{aligned}$$

תרגיל

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 & 0 \le x \le 1, t > 0 \\ u(x,0) = x^2 - 4 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

פתרון

נציב $u = XT$.

$$\begin{aligned}
XT' - X''T + XT &= 0 \\
X(T' + T) &= X''T \\
\frac{T' + T}{T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

:$\lambda = 0$

$$\begin{aligned} X'' &= 0 \\ X(x) &= ax + b \\ X'(0) &= a = 0 \\ X(1) &= a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0 \end{aligned}$$

פתרון טריוויאלי.
:$\lambda < 0$

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ r^2 + \lambda &= 0 \\ r &= \pm\sqrt{-\lambda} \\ X(x) &= Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \\ X'(0) &= \sqrt{-\lambda}A - \sqrt{-\lambda}B = 0 \Rightarrow A = B \\ X(1) &= Ae^{\sqrt{-\lambda}} + Be^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \\ \Rightarrow A\underbrace{\left(e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)}_{>0} &= 0 \\ A &= 0 \end{aligned}$$

פתרון טריוואלי.

:$\lambda < 0$

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0\\
r^2 + \lambda &= 0\\
r &= \pm i\sqrt{\lambda}\\
X(x) &= A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x\\
X'(0) &= B = 0\\
X(1) &= A\cos\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0\\
A \neq 0 &\Rightarrow \cos\sqrt{\lambda} = 0\\
\sqrt{\lambda} &= \frac{\pi}{2} + \pi n\\
\lambda_n &= \pi^2\left(\frac{1}{2} + n\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2\\
T_n' + T_n &= -\frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2 T_n\\
T_n' + \left(1 + \frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2\right)T_n &= 0\\
T_n &= A_n e^{-\left(1+\frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2\right)t}\\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(1+\frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2\right)t}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot(1+2n)x\right)\\
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+2n)x\right) = x^2 - 1\\
A_n &= 2\int_0^1 \left(x^2-1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+2n)x\right)dx\\
&= 2\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+2n)x\right)dx - 2\int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}(1+2n)x\,dx\\
&= \frac{-32(-1)^n}{\pi^3(2n+1)^3}\\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-32(-1)^{n+1}}{\pi^3(2n+1)^3}e^{-\left(1+\frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2\right)t}\cos\frac{\pi}{2}(2n+1)x
\end{aligned}$$

תרגיל

$$\begin{cases}
u_t - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0\\
u(x,0) = \cos^2 x\\
u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0
\end{cases}$$

פתרון

נניח כי $u(x,t) = X(x)T(t)$. נקבל:

$$\begin{aligned} XT' - 4x''T &= 0 \\ \frac{T'}{4T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda \end{aligned}$$

בנוסף, מתנאי השפה נקבל:

$$X'(0) = X'(\pi) = 0$$

$\lambda = 0$:

$$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$$

נצי תנאי שפה לקבל:

$$\begin{aligned} X'(0) &= A = 0 \\ X'(\pi) &= A = 0 \end{aligned}$$

לכן, $X_0(x) = B$. בנוסף נקבל:

$$\begin{aligned} T' &= 0 \\ T_0(t) &= c \end{aligned}$$

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ r^2 + \lambda &= 0 \\ r &= \pm\sqrt{-\lambda} \\ X(x) &= Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{aligned}$$

נציב תנאי שפה:

$$\begin{aligned} X'(0) &= \sqrt{-\lambda}A - \sqrt{-\lambda}B \\ X'(\pi) &= \sqrt{-\lambda}Ae^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}Be^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \\ & \sqrt{-\lambda}A\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0 \\ \Rightarrow & \quad A = B = 0 \end{aligned}$$

ולכן הפיתרון טריוויאלי.
$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ r^2 + \lambda &= 0 \\ r &= \pm i\sqrt{\lambda} \\ X(x) &= A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) - B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \end{aligned}$$

נציב תנאי שפה:

$$
\begin{aligned}
X'(0) &= \sqrt{\lambda}B = 0 \Rightarrow B = 0 \\
X'(\pi) &= \sqrt{\lambda}A\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\
A, \sqrt{\lambda} \neq 0 &\Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\
\lambda_n &= n^2 \\
T_n' + 4n^2T_n &= 0 \\
T_n &= A_n e^{-4n^2t}
\end{aligned}
$$

ולכן

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-4n^2t}\cos nx + \frac{A_0}{2}$$

נובע מצורת טור קוסינוסים:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$$

נציב תנאי התחלה: 2

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \\
A_n &= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{2} & n = 2 \\ 0 & n \neq 0, 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

7 תרגול 7

7.1 משוואות חום עם תנאי שפה לא הומוגניים

7.1.1 <u>מעבר לתנאי שפה הומוגניים:</u>

(1

$$u(0,t) = a(t), u(L,t) = b(t)$$

נגדיר פונקציות $u(x,t)$ כך ש:

$$v(0,t) = a(t), v(L,t) = b(t)$$

ננחש פנקציה מהצורה

$$\begin{aligned} v(x,t) &= f(t)x+g(t) \\ g(t) &= v(0,t)=a(t) \\ f(t) &= v(L,t)=Lf(t)+g(t) \\ \frac{b(t)-a(t)}{L} &= f(t) \\ v(x,t) &= \frac{x}{L}(b(t)-a(t))+a(t) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= a(t), u_x(L,t)=b(t) \\ v(x,t) &= \int\left(\frac{x}{L}(b(t)-a(t))+a(t)\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2L}(b(t)-a(t))+a(t)\cdot x \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} u(0,t) &= a(t), u_x(0,t)=b(t) \\ v(x,t) &= a(t)+b(t)x \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= a(t), u(L,t)=b(t) \\ v(x,t) &= (x-L)a(t)+b(t) \end{aligned}$$

תרגיל

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=\frac{x(1+\pi t)}{\pi} \\ u(0,t)=2 \\ u(\pi,t)=t \\ u(x,0)=2\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right) \end{cases}$$

פתרון

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{x}{\pi}(t-2)+2 \\ \omega(x,t) &= u(x,t)-v(x,t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w_t &= w_{xx} = u_t - u_{xx} - v_t + v_{xx} = \frac{x(1+\pi t)}{\pi} - \frac{x}{\pi} = xt \\
w(0,t) &= w(\pi,t) = 0 \\
w(x,0) &= 2\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \frac{2x}{\pi} - 2 = \frac{2x}{\pi^2}(\pi - x) \\
\omega &= \omega_h + \omega_p
\end{aligned}
$$

חלק הומוגני :

$$
\begin{cases}
\omega_t - \omega_{xx} = 0 \\
\omega(0,t) = \omega(\pi,t) = 0 \\
\omega(x,0) = \frac{2x}{\pi^2}(\pi - x)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_h(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 t} \sin kx \\
\omega_h(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = \frac{2x}{\pi^2}(\pi - x) \\
A_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2x}{\pi^2}(\pi - x) \sin kx dx \\
&= \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{2x\sin kx}{k^2} + \frac{2\cos kx}{k^2} - \frac{x^2\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{8}{\pi^3 k^3} - \frac{8(-1)^k}{\pi^3 k^3} \\
&= \begin{cases} 0 & k = 2n \\ \frac{16}{\pi^3 k^3} & k = 2n+1 \end{cases} \\
\omega_h(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^3 (2k-1)^3} \sin((2k-1)x) e^{-(2k-1)^2 t}
\end{aligned}
$$

החלק הלא הומוגני

$$
\begin{cases}
\omega_{pt} - \omega_{pxx} = xt \\
\omega_p(0,t) = \omega_p(\pi,t) = 0 \\
\omega_p(x,0) = 0
\end{cases}
$$

נבטא את ω ואת xt כטור סינוסים

$$\begin{aligned}
xt &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin kx \\
q_k(t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xt\sin kx dx \\
&= \frac{2t}{\pi}\left[-\frac{\pi}{k}\cos k\pi + \frac{\sin kx}{k^2}\bigg|_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{2t}{k}(-1)^{k+1} \\
\omega_p(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)\sin kx \\
\sum_{k=1}^{\infty}\left[h_k'(x) + k^2 h_k(t)\right]\sin kx &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2t}{k}(-1)^{k+1}\sin kx
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} h_k'(t) + k^2 h_k(t) = \frac{2t}{k}(-1)^{k+1} \\ h_k(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
h_k(t) &= e^{-\int k^2 dt}\left[\int e^{\int k^2 dt}\frac{2t}{k}(-1)^{k+1} dt + c\right] \\
&= e^{-k^2 t}\left[\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\int e^{k^2 t} t dt + c\right] \\
\int e^{k^2 t} t dt &= \frac{e^{k^2 t} t}{k^2} - \frac{1}{k^2}\int e^{k^2 t} dt \\
&= \frac{e^{k^2 t} t}{k^2} - \frac{e^{k^2 t}}{k^4} \\
\Rightarrow h_k(t) &= e^{-k^2 t}\left[\frac{2}{k^3}(-1)^{k+1}\left(e^{k^2 t} t - \frac{e^{k^2 t}}{k^2}\right) + c\right] \\
&= \frac{2}{k^3}(-1)^{k+1}\left(t - \frac{1}{k^2}\right) + ce^{-k^2 t} \\
h_k(0) &= \frac{2}{k^5}(-1)^{k} + c = 0 \\
\Rightarrow h_k(t) &= \frac{2}{k^3}(-1)^{k+1}\left[\frac{e^{-k^2 t}}{k^2} + t - \frac{1}{k^2}\right] \\
\omega_p(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^3}(-1)^{k+1}\cdot\left(\frac{e^{-k^2 t}}{k^2} + t - \frac{1}{k^2}\right)\sin kx
\end{aligned}$$

תרגיל

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \alpha u & 0 \le x \le 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

פתרון

תחילה מבצעים הפרדת משתנים:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= X(x)T(t) \\ XT' - X''T &= \alpha XT \\ XT' - \alpha T &= X''T \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T' - \alpha T}{T} = -\lambda \end{aligned}$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ r^2 + \lambda &= 0 \\ r &= \pm\sqrt{-\lambda} \\ X(x) &= ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x} \\ X(0) &= a + b = 0 \Rightarrow a = -b \\ X(1) &= ae^{\sqrt{-\lambda}} + be^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \Rightarrow a = b = 0 \end{aligned}$$

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} X'' &= 0 \\ X(x) &= ax + b \\ X(0) &= b \Rightarrow b = 0 \\ X(1) &= a \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

:$\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
X(x) &= a\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + b\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\
X(0) &= a = 0 \\
X(1) &= b\sin\sqrt{\lambda} = 0 \\
&\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \\
\lambda_k &= \pi^2 k^2 \\
T_k' - \alpha T_k &= -\lambda_k T_k \\
T_k' - (\alpha - \lambda_k) T_k &= 0 \\
T_k &= e^{\left(\alpha - \pi^2 k^2\right)t} \\
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\pi k x) e^{\left(\alpha - \pi^2 k^2\right)t} \\
u(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \pi k x = f(x) \\
A_k &= 2\int_0^1 f(x)\sin \pi k x dx
\end{aligned}$$

ב) מצא את u כאשר $\alpha = -1, f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \pi k x e^{-\left(1+\pi^2 k^2\right)x} \\
A_k &= 2\int_0^1 x \sin \pi k x dx \\
&= 2\left[-x\frac{\cos \pi k x}{\pi k}\bigg|_0^1 + \frac{1}{\pi k}\bigg|_0^1 \cos \pi k x dx\right] \\
&= 2\left[\frac{(-1)^{k+1}}{\pi k} + \frac{1}{\pi^2 k^2}\frac{\sin \pi k x}{1}\ |_0^1\right] = \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} \\
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} e^{-\left(1+\pi^2 k^2\right)t} \sin \pi k x
\end{aligned}$$

8 תרגול 8

8.1 משוואת חום הומוגנית על מוט אינסופי

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}dy$$

8.1.1 תרגיל:

$\varphi(x)=1$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy\\
\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu^2}d\mu &= \sqrt{\pi}\\
\text{(change of var.)}\quad \rho &= \frac{x-y}{2\sqrt{kt}}\\
d\rho &= -\frac{dy}{2\sqrt{kt}}\Rightarrow dy=-2\sqrt{kt}d\rho\\
u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{0}e^{-(x-y)^2/4kt}dy+\frac{1}{2\sqrt{kt}}\int_{0}^{\infty}e^{-(x-y)^2/4kt}dy\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}e^{-\rho^2}\left(-2\sqrt{kt}d\rho\right)+\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{-\infty}e^{-\rho^2}\left(-2\sqrt{kt}d\rho\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty}e^{-\rho^2}d\rho+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}e^{-\rho^2}d\rho=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\rho^2}d\rho\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}=1
\end{aligned}$$

8.1.2 משוואת חום לא הומוגנית על מוט אינסופי

$$\begin{cases}u_t=ku_{xx}+f(x,t)\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

משוואה הומוגנית:

$$\begin{cases}u_t=ku_{xx}\\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

משוואה לא הומוגנית:

$$\begin{cases}u_t=ku_{xx}+f(x,t)\\ u(x,0)=0\end{cases}$$

$$u_\rho(x,t)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-y)^2/4k(t-s)}f(y,s)\,dyds$$

8.1.3 תרגיל

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + 1 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(X-y)^2/4k(t-s)} dy \right] ds \\ &= \int_0^t ds = t \end{aligned}$$

הערה:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_t = k\omega_{xx} + \varphi(x) \\ \omega(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega(x,t) = \int_0^t u(x,t-s)\, ds$$

8.2 משוואת לפלס במלבן

תרגיל:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 \le x \le 4 \\ u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) & 0 \le x \le 3 \\ u(x,3) = 0 \\ u(0,y) = u(4,y) = 0 \end{cases}$$

פתרון

נציב

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x) \cdot Y(y) \\ X(0) &= X(4) = 0 \\ \frac{-Y''}{Y} &= \frac{X''}{X} = -\lambda \end{aligned}$$

:$\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0 \\
r^2 + \lambda &= 0 \\
r &= \pm i\sqrt{\lambda} \\
X(x) &= a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x \\
X(0) &= a = 0 \\
X(4) &= b\sin 4\sqrt{\lambda} = 0 \\
\Rightarrow 4\sqrt{\lambda} &= \pi k \\
\lambda &= \frac{\pi^2}{16}k^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_k'' - \frac{\pi^2}{16}k^2 Y_k &= 0 \\
r^2 - \frac{\pi^2 k^2}{16} &= 0 \\
r &= \pm\frac{\pi k}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_k &= A_k e^{\frac{\pi k}{4} y} + B_k e^{-\frac{\pi k}{4} y} \\
u(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{\pi k}{4} y} + B_k e^{-\frac{\pi k}{4} y} \right) \sin\left(\frac{\pi k x}{4}\right) \\
u(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \sin\left(\frac{\pi k x}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} x\right) \\
u(x,3) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{3\pi}{4} k} + B_k e^{-\frac{3}{4}\pi k} \right) \sin\left(\frac{\pi k x}{4}\right) = 0 \\
A_k + B_k &= 0 \quad k \neq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
A_1 + B_1 = 1 \Rightarrow B_1 = 1 - A_1 \\
A_1 e^{\frac{3}{4}\pi} + B_1 e^{-\frac{3}{4}\pi} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1 e^{0.75\pi} + (1 - A_1) e^{-0.75\pi} &= 0 \\
A_1 \left(e^{0.75\pi} - e^{-0.75\pi} \right) &= -e^{-0.75\pi} \\
A_1 &= \frac{-e^{-0.75\pi}}{e^{0.75\pi} - e^{-0.75\pi}} = -\frac{e^{-0.75\pi}}{2\sinh\left(\frac{3}{4}\pi\right)} \\
B_1 &= 1 + \frac{e^{-0.75\pi}}{e^{0.75\pi} - e^{-0.75\pi}} \\
&= \frac{e^{0.75\pi}}{e^{0.75\pi} - e^{-0.75\pi}} \\
&= \frac{e^{0.75\pi}}{2\sinh(0.75\pi)} \\
u(x,y) &= \left[-\frac{e^{0.75\pi} \cdot e^{0.75\pi}}{2\sin h(0.75\pi)} + \frac{e^{0.75\pi} e^{-0.75\pi}}{2\sinh(0.75\pi)} \right] \sin \frac{\pi}{4} x \\
&= \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{4}(3-4)\right)}{\sinh 0.75\pi} \sin \frac{3}{4} x
\end{aligned}
$$

תרגיל

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 \leq x, y \leq \pi \\
u_y(x,0) = 1 - \frac{2x}{\pi} \\
u_y(x,\pi) = 0 \\
u_x(0,y) = \cos y \\
u_x(\pi,y) = 0
\end{cases}
$$

פתרון:

$u=v+w$ באשר v תייצג את המשוואה

$$\begin{aligned} v_{xx}+v_{yy} &= 0 \\ v_y\left(x,0\right) &= 0 \\ v_y\left(x,\pi\right) &= 0 \\ v_x\left(0,y\right) &= \cos y \\ v_x\left(\pi,y\right) &= 0 \end{aligned}$$

ו־w תייצג את המשוואה השנייה

$$\begin{aligned} w_{xx}+w_{yy} &= 0 \\ w_y\left(x,0\right) &= 1-\frac{2x}{\pi} \\ w_y\left(x,\pi\right) &= 0 \\ w_x\left(0,y\right) &= w_x\left(\pi,y\right)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'\left(0\right) &= X'\left(\pi\right)=0 \\ \omega\left(x,y\right) &= X\left(x\right)Y\left(y\right) \\ -\frac{Y''}{Y} &= \frac{X''}{X}=-\lambda \end{aligned}$$

:$\lambda=0$

$$\begin{aligned} X'' &= 0 \\ X\left(x\right) &= ax+b \\ X'\left(0\right) &= X'\left(\pi\right)=a=0 \end{aligned}$$

ולכן $X_0(x) = b$. $Y_0'' = 0 \Rightarrow Y_0(y) = ay + b$

$\lambda > 0$:

$$
\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0 \\
r^2 + \lambda &= 0 \\
r &= \pm i\sqrt{\lambda} \\
X(x) &= a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x \\
X'(0) &= b\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow b = 0 \\
X'(\pi) &= -a\sqrt{\lambda}\sin\pi\sqrt{\lambda} = 0 \\
\sin\sqrt{\lambda}\pi &= 0 \\
\lambda_k &= k^2 \\
Y_k'' - k^2 Y_k &= 0 \\
Y_k &= A_k e^{ky} + B_k e^{-ky} \\
w(x,y) &= A_0 y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}\right)\cos kx \\
\omega_y(x,0) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(kA_k - kB_k\right)\cos kx = 1 - \frac{2x}{\pi} \\
w_y(x,\pi) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(kA_k e^{\pi k} - ke^{-\pi k}B_k\right)\cos kx = 0 \\
A_0 &= 0 \\
kA_k e^{\pi k} - kB_k e^{-\pi k} &= 0 \\
&\Rightarrow B_k = A_k e^{2\pi k} \\
kA_k - kB_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\cos kx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\sin kx}{k}\bigg|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos x dx \\
&= -\frac{4}{\pi^2}\left[\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right] \\
kA_k - kB_k &= 0 \quad k = 2n \\
kA_k - kB_k &= \frac{8}{k^2\pi^2} \quad k = 2n-1
\end{aligned}
$$

מכאן

$$\begin{aligned}
kA_k - A_k e^{2\pi k} k &= \frac{8}{k^2\pi^2} \\
A_k\left(1 - e^{2\pi k}\right) &= \frac{8}{k^3\pi^2} \\
A_k &= \frac{8}{k^3\pi^2\left(1 - e^{2\pi k}\right)} \\
B_k &= \frac{8e^{2\pi k}}{k^3\pi^2\left(1 - e^{2\pi k}\right)} \\
w\left(x,y\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\left(2k-1\right)^3 \pi^2 \left(1 - e^{2\pi(2k-1)}\right)} \left(e^{2(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)y} + e^{(2k-1)y}\right) \cos\left(2k-1\right)x
\end{aligned}$$

ובאופן דומה ל-v:

$$\begin{aligned}
v\left(x,y\right) &= X\left(x\right)Y\left(y\right) \\
Y'\left(0\right) &= Y'\left(\pi\right) = 0 \\
\frac{Y''}{Y} &= \frac{X''}{X} = -\lambda
\end{aligned}$$

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
Y'' &= 0 \\
Y\left(y\right) &= ay + b \\
Y'\left(0\right) &= Y'\left(\pi\right) = a = 0
\end{aligned}$$

ולכן $Y_0(y)=b$. $X_0''=0\Rightarrow X_0(x)=ax+b$

$\lambda>0$:

$$\begin{aligned}
Y''+\lambda Y &= 0\\
r^2+\lambda &= 0\\
r &= \pm i\sqrt{\lambda}\\
Y(y) &= a\cos\sqrt{\lambda}y+b\sin\sqrt{\lambda}y\\
Y'(0) &= b\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow b=0\\
Y'(\pi) &= -a\sqrt{\lambda}\sin\pi\sqrt{\lambda}=0\\
\sin\sqrt{\lambda}\pi &= 0\\
\lambda_k &= k^2\\
Y_k''-k^2Y_k &= 0\\
X_k &= A_ke^{kx}+B_ke^{-kx}\\
v(x,y) &= A_0x+B_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_ke^{kx}+B_ke^{-kx}\right)\cos ky\\
v_x(0,y) &= A_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(kA_k-kB_k\right)\cos ky=\cos y\\
v_x(\pi,y) &= A_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(kA_ke^{\pi k}-ke^{-\pi k}B_k\right)\cos ky=0\\
A_k &= B_k=0\quad k\neq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}A_1-B_1=1\\ A_1e^{\pi}-B_1e^{-\pi}=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow B_1 &= A_1e^{2\pi}\\
A_1-A_1e^{2\pi} &= 1\\
A_1 &= \frac{1}{1-e^{2\pi}},B_1=\frac{e^{2\pi}}{1-e^{2\pi}}\\
v(x,y) &= B_0+\left[\frac{e^x}{1-e^{2\pi}}+\frac{e^{2\pi}e^{-x}}{1-e^{2\pi}}\right]\cos y\\
u &= v+w
\end{aligned}$$

9 תרגול 9

9.1 משוואת לפלס על המעגל

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0 & x^2+y^2<R^2\\ u=f(x,y) & x^2+y^2=R^2\end{cases}$$

נתרגם לקואורגינטות קוטביות:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \omega(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta)) \end{cases}$$

נשים לב ש

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2}$$

$$\begin{cases} r^2\omega_{rr} = \omega_{\theta\theta} + r\omega_r & 0 \le r \le R \\ \omega(R,\theta) = h(\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\omega(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} h(\theta)\cos n\theta d\theta, a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(\theta)\, d\theta \\ b_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} h(\theta)\sin n\theta d\theta \end{aligned}$$

תרגיל:

פתור את משוואת לפלס בעיגול היחידה עם תנאי השפה $u(x,y) = y^2$ עבור $R=1$.

פתרון:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2+y^2 < 1 \\ u(x,y) = y^2 & x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

לאחר מעבר לקואורדינטות קוטביות מקבלים

$$\omega(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)$$

ונכתוב את תנאי השפה בקואורדינטות קוטביות:

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2\sin^2\theta = [r=1] = \sin^2\theta \\ \omega(1,\theta) &= h(\theta) = \sin^2\theta \\ h(\theta) &= \omega(1,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) = \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta \\ a_0 &= 1 \\ a_n &= \begin{cases} -\frac{1}{2} & n=2 \\ 0 & n\neq 2 \end{cases}, b_n = 0 \quad \forall n \end{aligned}$$

$$\omega(r,\theta) = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\cos 2\theta$$

נחזור ל x,y : ר

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{r^2} \\ r^2\cos 2\theta &= x^2 - y^2 \\ \Rightarrow u(x,y) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right) \end{aligned}$$

תרגיל:

1. הוכיחו שאם $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בעלת נגזרות חלקיות רציפות מכל סדר אז הפונקציות u_x, u_y גם הן הרמוניות.
2. פתור את

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & -\pi < \theta < \pi \\ u(6,\theta) = \theta^2 & 0 < r < 6 \end{cases}$$

3. לגבי הפתרון שבסעיף הקודם חשבו

$$\min\{u(r,\theta) \mid 0 \le r \le 6, -\pi \le \theta \le \pi\}$$

פתרון:

1. ידוע לנו ש

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ (u_x)_{xx} + (u_x)_{yy} &= (u_{xx})_x + (u_{yy})_x \\ &= (u_{xx}+u_{yy})_x \\ &= 0_x = 0 \end{aligned}$$

באותה דרך נקבל ש

$$\left(u_y\right)_{xx}+\left(u_y\right)_{yy}=\left(u_{xx}+u_{yy}\right)_y=0_y=0$$

.2

$$\begin{aligned}
u\left(r,\theta\right) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)\\
a_n &= \frac{1}{\pi6^n}\int_0^{2\pi}\theta^2\cos\left(n\theta\right)d\theta\\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta^2d\theta=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{8\pi^2}{3}\\
n\geq1\quad a_n &= \frac{1}{\pi6^n}\int_0^{2\pi}\theta^2\cos n\theta d\theta\\
&= \frac{1}{\pi6^n}\left[\theta^2\frac{\sin n\theta}{n}+\frac{2\theta\cos n\theta}{n^2}-\frac{2\sin n\theta}{n^3}\right]_0^{2\pi}\\
&= \frac{4\pi}{\pi6^nn^2}=\frac{4}{6^nn^2}\\
b_n &= \frac{1}{\pi6^n}\int_0^{2\pi}\theta^2\sin n\theta d\theta\\
&= \frac{1}{\pi6^n}\left[\frac{2\theta\sin n\theta}{n^2}+\frac{2\cos n\theta}{n^3}-\frac{\theta^2\cos n\theta}{n}\right]_0^{2\pi}\\
&= \frac{-4\pi}{6^n\pi}\\
u\left(r,\theta\right) &= \frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{6}\right)^n\cdot\frac{4}{n}\left[\frac{1}{n}\cos n\theta-\pi\sin n\theta\right]
\end{aligned}$$

3. הערך המינימלי של פונקציות הרמוניות מתקבל על השפה ולכן מספיק לבדוק את הערך עבור $r=6$ כלומר:

$$\begin{aligned}
u\left(6,\theta\right) &= \frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{6}\right)^n\cdot\frac{4}{n}\left[\frac{1}{n}\cos n\theta-\pi\sin n\theta\right]\\
u\left(6,\theta\right) &= \theta^2
\end{aligned}$$

עבור $\theta=0$ המינימום הוא $u\left(6,0\right)=0$.

9.1.1 נוסחת פואסון:

$$u\left(r,\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\phi}\right)\underbrace{\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\left(\phi-\theta\right)+r^2}}_{\text{Poisson Kernel}}d\phi$$

תרגיל ממבחן

1. מצא פונקציה הרמונית $u(x,y)$ בתוך המעגל $x^2+y^2\le 1$ אם על השפה נקבל x^3.
2. מצא פונקציה הרמונית במרכז $x^2+y^2\le R^2$ אם על השפה מקבלים $u(x,y)=R+x$ ומצא את ערך הפונקציה במרכז.

פתרון

1.

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta, y=r\sin\theta \\
h(\theta) &= r^3\cos^3\theta=[r=1]=\cos^3\theta \\
\omega(1,\theta) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}1^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)=h(\theta) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right) \\
a_n &= \begin{cases}\frac{3}{4} & n=1\\ \frac{1}{4} & n=3\\ 0 & n\neq 1,3\end{cases}\quad,\quad b_n=0\quad\forall n
\end{aligned}$$

נחזור לx,y

$$\begin{aligned}
\omega(r,\theta) &= \frac{3}{4}r\cos\theta+\frac{1}{4}r^3\cos 3\theta \\
\cos\theta &= \frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\sin\theta &= \frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\frac{x^3}{r^3}-3\frac{r}{x} \\
u(x,y) &= \frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^3\left(4\frac{x^3}{r^3}-3\frac{x}{r}\right) \\
&= \frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\left(4x^3-3xr^2\right) \\
&= \frac{3}{4}x+x^3-\frac{3}{4}x\left(x^2+y^2\right) \\
&= \frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}xy^2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0 & x^2+y^2<R^2\\ u(x,y)=R+x & x^2+y^2=R^2\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\omega(r,\theta) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}R^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)=R-R\cos\theta\\
a_0 &= 2R_1 \qquad a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}, b_n=0\forall n\\
\omega(r,0) &= R+r\cos\theta
\end{aligned}
$$

נחזור ל־x,y :

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\\
\Rightarrow u(x,y) &= x+R\\
u(0,0) &= R
\end{aligned}
$$

תרגיל ממבחן:

$$
\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0 & x^2+y^2<1\\ u(x,y)=x(x+y) & x^2+y^2=1\end{cases}
$$

פתרון:

$$
\begin{aligned}
h(0) &= \cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\theta\\
\omega(1,0) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)=h(\theta)\\
\Rightarrow a_0 &= 1,\quad a_n=\begin{cases}\frac{1}{2} & n=2\\ 0 & n\neq 2\end{cases}, b_n=\begin{cases}\frac{1}{2} & n=2\\ 0 & n\neq 2\end{cases}\\
\omega(r,\theta) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta+\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{x}{r},\sin\theta=\frac{y}{r}\\
\cos 2\theta &= \frac{x^2-y^2}{r^2},\sin 2\theta=\frac{2xy}{r^2}\\
u(x,y) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)+\frac{1}{2}2xy\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+xy
\end{aligned}
$$

תרגיל ממבחן:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x^2+y^2<4 \\ u(x,y)=2xy+2y^2 & x^2+y^2=4 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} h(\theta) &= 2\cdot 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta+2\cdot 4\sin^2\theta=8\cos\theta\sin\theta+8\sin^2\theta \\ &= 4\sin 2\theta+4-4\cos 2\theta \\ \omega(2,\theta) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)=h(\theta) \\ a_0=0 \quad &, \quad a_n=\begin{cases}-1 & n=2\\ 0 & n\neq 2\end{cases} \\ & \quad\;\; b_n=\begin{cases}1 & n=2\\ 0 & n\neq 2\end{cases} \\ \omega(r,\theta) &= 4-r^2\cos 2\theta+r^2\sin 2\theta \end{aligned}$$

נחזור לx,y ף

$$\begin{aligned} r^2\cos 2\theta &= x^2-y^2 \\ r^2\sin 2\theta &= 2xy \\ u(x,y) &= 4+y^2-x^2+2xy \end{aligned}$$

10 תרגול 10

10.1 פתרון מבחן 2009 מועד א'

10.1.1 שאלה 1

מצא פתרון כללי (אינטגרל כללי) של המשוואה הבאה. בשביל אילו ערכים קיים פתרון למשוואה?

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sin x+\frac{\partial z}{\partial y}\sin y=\sin z$$

פתרון:

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{dy}{\sin y} = \frac{dz}{\sin z}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{\sin x} &= \frac{dy}{\sin y} \\
\frac{\sin x dx}{\sin^2 x} &= \frac{\sin y dy}{\sin^2 y} \\
\frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} &= \frac{\sin y dy}{1-\cos^2 y} \\
\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) &= \ln\left(\frac{1+\cos y}{1-\cos y}\right) + c_1 \\
c_1 &= \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{1+\cos y}{1-\cos y} \\
c_2 &= \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{1+\cos z}{1-\cos z} \\
c_1 &= \phi\left(c_2\right) \\
\Rightarrow \cos y \neq 1, & \quad \cos x \neq -1 \\
\Rightarrow x \neq -\pi + 2\pi k & \\
y &\neq 2\pi k
\end{aligned}$$

10.1.2 שאלה 2

מצא משטח שמקיים את המשוואה:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4$$

ועובר דרך הפרבולה $\begin{cases} y^2 = z \\ x = 0 \end{cases}$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
x_t &= \frac{1}{x} \Rightarrow xdx = dt \Rightarrow \frac{x^2}{2} = t + f_1\left(s\right) \\
,y_t &= \frac{1}{y} \Rightarrow ydy = dt \Rightarrow \frac{y^2}{2} = t + f_2\left(s\right) \\
z_s &= 4 \Rightarrow z\left(t,s\right) = 4t + f_3\left(s\right)
\end{aligned}$$

קו התחלה: $\left(0,s,s^2\right)$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x^2\left(0,s\right)}{2}=f_1\left(s\right)\\ \frac{s^2}{2} &= \frac{y^2\left(0,s\right)}{2}=f_2\left(s\right)\\ s^2 &= z\left(0,s\right)=f_3\left(s\right)\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{2}=t\\ \frac{y^2}{2}=t+\frac{s^2}{2}\Rightarrow\frac{y^2}{2}=\frac{x^2+s^2}{2}\Rightarrow s^2=y^2-s^2\\ z=s^2+4t\end{cases}$$

$$z\left(x,y\right)=y^2-x^2+2x^2=x^2+y^2$$

10.1.3 שאלה 3

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} \qquad 0<x<1,t>0\\ u\left(x,0\right) &= \cos^2\left(\pi x\right) \quad 0\le x\le 1\\ u_t\left(x,0\right) &= \sin^2\left(\pi x\right)\cos\pi x \quad 0\le x\le 1\\ u_x\left(0,t\right) &= u_x\left(1,t\right)=0 \qquad t\ge 0\end{aligned}$$

פתרון (משוואת הגלים)

$u=X\left(x\right)T\left(t\right)$

$$\begin{aligned} XT'' &= 4X''T\\ \frac{T''}{4T} &= \frac{X''}{X}=-\lambda\\ X'\left(0\right) &= X'\left(1\right)=0\end{aligned}$$

$\lambda=0$:

$$\begin{aligned} X'' &= -\lambda x\\ X\left(x\right) &= Ax+B\\ X' &= A=0\end{aligned}$$

ולכן $x\equiv\text{const.}$

:$\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0 \\
r^2 + \lambda &= 0 \\
r &= \pm i\sqrt{\lambda} \\
X(x) &= A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\
X'(0) &= \sqrt{\lambda}B = 0 \Rightarrow B = 0 \\
X'(1) &= -\sqrt{\lambda}A\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \\
&\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \\
\sqrt{\lambda} &= \pi k \\
\lambda &= (\pi k)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_k'' + 4\lambda_k T_k &= 0 \\
T_k'' + 4\pi^2 k^2 T_k &= 0 \\
r^2 + 4\pi^2 k^2 &= 0 \\
r &= \pm 2\pi i k \\
T_k(t) &= A_k \cos(2\pi k t) + B_k \sin(2\pi k t) \\
T_0'' &= 0 \\
T_0(t) &= at + b \\
u(x,t) &= \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos 2\pi k t + B_k \sin 2\pi k t\right] \cos \pi k x \\
\cos^2(\pi x) &= \frac{1 + \cos 2\pi x}{2} \\
\sin^2(\pi x)\cos(\pi x) &= \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} \cos \pi x \\
&= \frac{\cos \pi x}{4} - \frac{\cos 3\pi x}{4} + \cos \pi x \\
u(x,0) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k}^{\infty} A_k \cos \pi k x \\
&= \frac{1 + \cos 2\pi x}{2} \\
\Rightarrow A_0 &= 1 \\
A_2 &= \frac{1}{2} \\
A_{k \neq 0,2} &= 0 \\
u_t(x,0) &= \frac{B_0}{2} + \sum 2\pi k B_k \cos(\pi k x) \\
&= \frac{\cos \pi x - \cos 3\pi x}{4} \\
B_0 &= 0 \\
B_1 &= \frac{1}{8\pi} \\
B_3 &= \frac{1}{24\pi} \\
B_{k \neq 1,3} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\underline{u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\pi t \cos 2\pi x + \frac{1}{8\pi}\sin 2\pi t \cos \pi x - \frac{1}{24\pi}\sin 6\pi t \cos 3\pi x}
$$

10.1.4 שאלה 4

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4 \\ u\left(x,0\right) = \sin 2x \\ u_t\left(x,0\right) = \sin x \\ u\left(0,t\right) = u\left(\pi,t\right) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} u &= XT \\ XT'' &= X''T - XT \\ \frac{T''+T}{T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda \quad X\left(0\right) = X\left(\pi\right) = 0 \end{aligned}$$

$:\lambda > 0$

$$
\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0 \\
r^2 + \lambda &= 0 \\
r &= \pm i\sqrt{\lambda} \\
X(x) &= A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda} \\
X(0) &= A = 0 \\
X(\pi) &= B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\
&\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \\
\sqrt{\lambda}\pi &= \pi k \\
\lambda_k &= k^2 \\
T_k'' + T_k &= -k^2 T_k \\
T_k'' + \left(1 + k^2\right) T_k &= 0 \\
r^2 + \left(1 + k^2\right) &= 0 \\
r &= \pm i\sqrt{1 + k^2} \\
T_k(t) &= A_k\cos\left(\sqrt{1 + k^2}t\right) + B_k\sin\left(\sqrt{1 + k^2}t\right) \\
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\left(\sqrt{1 + k^2}t\right) + B_k\sin\left(\sqrt{1 + k^2}t\right)\right]\sin kx \\
u(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin kx = \sin 2x \\
A_k &= \begin{cases} 1 & k = 2 \\ 0 & k \neq 2 \end{cases} \\
u_t(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{1 + k^2}B_k\sin kx = \sin x \\
B_k &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases} \\
u(x,t) &= \cos\sqrt{5}t\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\sin x
\end{aligned}
$$

10.1.5 שאלה 5

פתור את המשוואה $\Delta u = 0$, $u = u(x,y)$ בתחום $D = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi \end{array} \right\}$ עבור התנאים:

$$\begin{cases} u(\pi,y) = \sin y \\ u(0,y) = \sin 2y \\ u(x,\pi) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x)\,Y(y) \\ X''Y + XY'' &= 0 \\ -\frac{X''}{X} &= \frac{Y''}{Y} = -\lambda \\ Y(0) &= Y(\pi) = 0 \end{aligned}$$

:$\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
Y'' + \lambda Y &= 0 \\
r^2 + \lambda &= 0 \\
r &= \pm i\sqrt{\lambda} \\
Y(y) &= A\cos\sqrt{\lambda}y + B\sin\sqrt{\lambda}y \\
Y(0) &= A = 0 \\
Y(\pi) &= B\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \\
&\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \lambda_k = k^2 \\
X_k'' - \lambda_k X_k &= 0 \\
r^2 - k^2 &= 0 \\
r &= \pm k \\
X_k(x) &= A_k e^{kx} + B_k e^{-kx} \\
u(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k e^{kx} + B_k e^{-kx}\right] \sin ky \\
u(0,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} [A_k + B_k] \sin ky = \sin 2y \\
u(\pi,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k e^{\pi k} + B_k e^{-\pi k}\right] \sin ky = \sin y \\
A_k &= B_k = 0, k \neq 1,2 \\
A_2 + B_2 &= 1 \\
A_2 e^{2\pi} + B_2 e^{-2\pi} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ A_1 e^{\pi} + B_1 e^{-\pi} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= -A_2 e^{4\pi} \\
A_2\left(1 - e^{4\pi}\right) &= 1 \\
A_2 &= \frac{1}{1 - e^{4\pi}}, B_2 = \frac{e^{4\pi}}{1 - e^{4\pi}} \\
B_1 &= -A_1 \\
A_1\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) &= 1 \\
A_1 &= \frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}}, B_1 = -\frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \\
u(x,y) &= \left[\frac{e^{x}}{e^{\pi} e^{-\pi}} - \frac{e^{-x}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\right] \sin y + \left[\frac{e^{2x}}{1 - e^{4\pi}} - \frac{e^{-2x} e^{4\pi}}{1 - e^{4\pi}}\right] \sin 2y
\end{aligned}$$

10.1.6 שאלה 7

מצא פונקציה הרמונית בתוך התחום $x^2 + y^2 \leq x + y$ עם תנאי השפה $u \mid_{x^2+y^2=x+y} = y^2$.

פתרון:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &\le x+y\\
x^2-x+y^2-y &\le 0\\
x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4} &\le \frac{1}{2}\\
\left(x-{}^1\!/_2\right)^2+\left(y-{}^1\!/_2\right)^2 &\le \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x-\frac{1}{2} &= r\cos\theta\\
y-\frac{1}{2} &= r\sin\theta, r=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}\\
h(\theta) &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{\sin^2\theta}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\\
\omega(r,\theta) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right]r^n\\
\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\theta\right) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right]\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\\
a_0=1, \quad & b_1=1, a_2=-\frac{1}{2}\\
\omega(r,\theta) &= \frac{1}{2}+r\sin\theta-\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta
\end{aligned}$$

נחזור בחזרה ל(x,y):

$$\begin{aligned}
r\sin\theta &= y-\frac{1}{2}\\
r^2\cos 2\theta &= r^2\cos^2(\theta)-r^2\sin^2\theta\\
&= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\\
u(x,y) &= \frac{1}{2}+y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\\
&= y+\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y
\end{aligned}$$

11 תרגול 11

11.1 שאלה 6

מצא פיתרון של בעיית דיריכלה למעגל עם רדיוס R ומרכזו בראשית $(0,0)$עם תנאי השפה $u\mid_{\Gamma=R}=3r\theta\left(2\pi-\theta\right)$.

11.1.1 פתרון:

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right] \\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 3R\theta\left(2\pi-\theta\right) d\theta = \frac{1}{\pi}\left[3\pi R\theta^2 - R\theta^3\right]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi^2 R \\
R^n a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 3R\theta\left(2\pi-\theta\right)\cos n\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\left[3R\theta\left(2\pi-\theta\right)\frac{\sin n\theta}{n}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(6R\pi - 6R\theta\right)\cos n\theta d\theta\right] \\
&= \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\left(6R\theta - 6R\pi\right)\sin n\theta d\theta \\
&= \frac{6R}{\pi n}\left[\int_0^{2\pi}\cos n\theta d\theta - \pi\int_0^{2\pi}\sin n\theta d\theta\right] \\
&= \frac{6R}{\pi n}\left[\frac{\sin n\theta}{n^2} - \frac{\theta\cos n\theta}{n} + \frac{\pi\cos n\theta}{n}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{6R}{\pi n}\left[\frac{\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{n} + 0\right] = -\frac{12R}{n^2} \\
a_n &= -\frac{12}{R^{n-1}n^2} \\
R^n b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 3R\theta\left(2\pi-\theta\right)\sin n\theta d\theta = 0 \\
h(\theta) &= 3R\theta\left(2\pi-\theta\right) \\
h(2\pi-\theta) &= h(\theta) \\
R^n b_n &= \frac{1}{\pi}\left[3R\theta\left(2\pi-\theta\right)\frac{\cos n\theta}{n}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\left(6R\pi - 6R\theta\right)\frac{\cos n\theta}{n} d\theta\right] \\
&= \frac{6R}{\pi n}\left[\int_0^{2\pi}\cos n\theta d\theta - \int_0^{2\pi}\theta\cos n\theta d\theta\right] \\
&= -\frac{6R}{\pi n}\left[\frac{\cos n\theta}{n^2} + \frac{\theta\sin n\theta}{n}\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}
$$

11.1.2 תזכורת תיאורטיות:

- נקודה סימטרית:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega - z}d\omega \qquad z = re^{i\theta}, \omega = Re^{i\varphi} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\omega)}{\omega - z^*}d\omega = 0 \end{aligned}$$

- נוסחת דלמבר:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^t u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha = x + at, \beta = x - at$$

$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$$

מציבים תנאי התחלה ומקבלים נוסחת דלמבר.

- משוואת חום, גלים בקטע סופי, לפלס (במלבן) ובקטע סופי:
  - הפרדת משתנים.
  - הצבה במשוואה
  - פיתרון בעיית שטרום ליוביל.
  - באמצעות הλות שמצאנו נחשב T_λ.
  - נוסחה כללית:

$$u(x,t) = \sum_\lambda X_\lambda(x) T_\lambda(t)$$

  - הצבת תנאי התחלה ושימוש בנוסחת טור פורייה לחישוב המקדמים.

11.1.3 עקרון המקסימום במשוואת החום

במלבן $\Gamma_1 : y = 0, x \le \ell, \Gamma_2 : x = 0, y \le T, \Gamma_4 : x = \ell, y \le T, \Gamma_3 : y = T$. עוד נסמן כי M_Γ - הערך המקסימלי של u על השפה Γ . μ הערך המקסימלי של u בתחום: $M_\Gamma \le \mu$. נניח בדרך השלילה $M_\Gamma < \mu$ כלומר קיים $\epsilon > 0$ כך ש-$M_\Gamma + \epsilon = \mu$. נסתכל בפונקציה

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{\epsilon}{2T}(T-t)$$

לפי משפט ווירשטראס מקבלת מקסימום ב(x_0,t_0). נרצה להוכיח שהנקודה הזו איננה על השפה ולכן נקבל סתירה וש$M_\Gamma=\mu$.

$$\begin{aligned} v\left(x,0\right) &= u\left(x,0\right)+\frac{\epsilon}{2}\leq M_{\Gamma}+\frac{\epsilon}{2}<\mu \\ v\left(0,t\right) &= u\left(0,t\right)+\frac{\epsilon}{2T}\left(T-t\right)\leq M_{\Gamma}+\frac{\epsilon}{2}<\mu \\ v\left(\ell,t\right) &= u\left(\ell,t\right)+\frac{\epsilon}{2T}\left(T-t\right)\leq M_{\Gamma}+\frac{\epsilon}{2}<\mu \end{aligned}$$

אבל $v\left(x_0,t_0\right)\geq\mu$. בנקודה $\left(x_0,t_0\right)$ מאינפי צריך להתקיים

$$\frac{\partial v}{\partial t}\geq0,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}}\leq0$$

מצד שני,

$$v_{xx}=u_{xx},v_{t}=u_{t}-\frac{\epsilon}{2T}$$

$$0=u_{t}\left(x_0,t_0\right)-u_{xx}\left(x_0,t_0\right)=\underbrace{v_{t}\left(x_0,t_0\right)}_{\geq0}+\underbrace{\frac{\epsilon}{2T}}_{>0}-\underbrace{v_{xx}\left(x_0,t_0\right)}_{<0}$$

אז $u\left(x,t\right)$ בנקודה $\left(x_0,t_0\right)$לא מקיימת את המשוואה ולכן $M_\Gamma=\mu$.

12 תרגול 12

12.0.4 שאלה 1 ־ לא בחומר (תודה אריאל)

5. מצא את הפתרון של המשוואה

$$u_t=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)\ ,\qquad 0<r<a\ ,t>0$$

עם תנאי השפה

$$u(a,t)=0$$

ותנאי ההתחלה

$$u(r,0)=f(r)$$

מה הקשר בין בעייה זו ומשוואת החום בעיגול ?

12.0.5 שאלה 2 ־ מההרצאה האחרונה

$0\leq x,y\leq1$ ונתונות שתי פונקציות הרמוניות u,v כך ש:

u	v
$u(x,0)=x(x-1) \quad 0\le x\le 1$	$\mathrm{v}(x,0)=1 \quad 0\le x\le 1$
$u(0,y)=\sin(\pi y) \quad 0\le y\le 1$	$\mathrm{v}(0,y)=\cos\pi y \quad 0\le y\le 1$
$u(x,1)=2x(x-1) \quad 0\le x\le 1$	$\mathrm{v}(x,1)=1 \quad 0\le x\le 1$
$u(1,y)=\sin 2\pi iy \quad 0\le y\le 1$	$\mathrm{v}(1,y)=1 \quad 0\le y\le 1$

צריך לחשב

$$m:=\max|u(x,y)-v(x,y)|$$

והתשובה היא $m=2$. רמז: נתבונן בפונקציה $\omega=u-v$.

פתרון:

פונקציות הרמוניות מקבלות את המקסימום על השפה. נרצה לבדוק אם $\omega=u-v$ גם הרמונית:

$$\Delta\omega=\omega_{xx}+\omega_{yy}=u_{xx}+u_{yy}-v_{yy}-v_{xx}=\Delta u-\Delta v=0$$

$$\begin{cases}\omega(\lambda,0)=x(x-1)-1=x^2-x-1\\ \omega(0,y)=\sin\pi y-\cos\pi y\\ \omega(x,1)=2x(x-1)-1=2x^2-2x-1\\ \omega(1,y)=\sin 2\pi y-1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\max|\omega(1,y)| &= 2 \qquad y={}^3\!/_4\\ \max|u(0,y)| &< 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max\left|\omega\left(x,y\right)\right| &= \max\left|x^2-x-1\right| \\ &\leq \max\left|x^2\right|+\max\left|x+1\right|<2 \\ \max\left|\omega\left(x,1\right)\right| &= \max\left|2x^2-2x-1\right| \\ f\left(x\right) &= x^2-x-1 \\ f'\left(x\right) &= 2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ \max\left|f\left(x\right)\right| &= 1\frac{1}{4}<2 \\ g\left(x\right) &= 2x^2-2x-1 \\ g'\left(x\right) &= 4x-2\Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{4}-\frac{2}{2}-1=-1.5 \\ \max\left|g\left(x\right)\right| &= 2\end{aligned}$$

ולכן $\max_{x\in[0,1]}\left|\omega\left(x\right)\right|=2$ כדרוש.

12.0.6 תרגיל 3

1. נקודה סימטרית ־ הוכחנו שיעור קודם.
2. על סמך א' הוכח כי

$$\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2R\cos\left(\varphi-\theta\right)}=1+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n\left(\theta-\varphi\right)$$

3. על סמך סע' ב' הוכח כי ההתכנסות של טור מתכנס במ"ש ואם α_n,β_n מקדמי פורייה של הטור הוכח כי

$$R<\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\alpha_n+\beta_n}}$$

פתרון

1. הגענו בשיעור שעבר ל

$$u\left(r,\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\varphi}\right)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\left(\theta-\varphi\right)}d\varphi$$

נזכיר כיצד הגענו לכך:

$$z^*=\frac{R^2}{z},\omega=Re^{i\varphi},z=re^{i\theta}$$

2. מהביטוי בסעיף א':

$$\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}=\Re\left(\frac{\omega+z}{z-\omega}\right)$$

$$\begin{aligned}
1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\theta-\varphi) &= \Re\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}e^{i(\theta-\varphi)}\right)^n\right)\\
&= \Re\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{re^{i\theta}}{Re^{\varphi}}\right)^n\right)\\
&= \Re\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\omega}\right)^n\right)\\
&= \Re\left(1+2\frac{\frac{z}{\omega}}{1-\frac{z}{\omega}}\right)\\
&= \Re\left(1+2\frac{z}{\omega-z}\right)\\
&= \boxed{\Re\left(\frac{\omega+z}{\omega-z}\right)}
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\varphi}\right)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\theta-\varphi)\right]d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\theta}\right)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(\cos n\theta\cos n\varphi+\sin n\theta\sin n\varphi)\right]d\varphi\\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\varphi}\right)d\varphi}_{\frac{\alpha_0}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta\right]\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\varphi}\right)\cos n\varphi d\varphi\Rightarrow\alpha_n=\frac{1}{R^n}a_n\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\varphi}\right)\sin n\varphi d\varphi\Rightarrow\beta_n=\frac{1}{R^n}b_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n+\beta_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\varphi}\right)\cos n\varphi d\varphi+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\varphi}\right)\sin n\varphi d\varphi}\\ &= \frac{1}{R}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\pi}}\sqrt[n]{\int_0^{2\pi}h\left(\varphi\right)\left(\cos n\varphi+\sin n\varphi\right)d\varphi}\\ &< \frac{1}{R}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^{2\pi}h\left(\varphi\right)\left(\cos n\varphi+\sin n\varphi\right)d\varphi}=\frac{1}{R}\end{aligned}$$

אזהרה:

- להזהר במשוואות קוואזי לינאריות.
- לא לבצע אינטגרל על משהו תלוי בפונקציה ז"א

$$y_t=x+1\not\Rightarrow y\left(t,s\right)=xt+t+f\left(s\right)$$

כי גם $x=x\left(t\right)$. ניתן לדוגמה לרשום

$$y\left(t,s\right)=\int xdt+f\left(s\right)$$

בתופעה זו נניח נתקלים כאשר $x_t=a,y_t=b,u_t=c$.

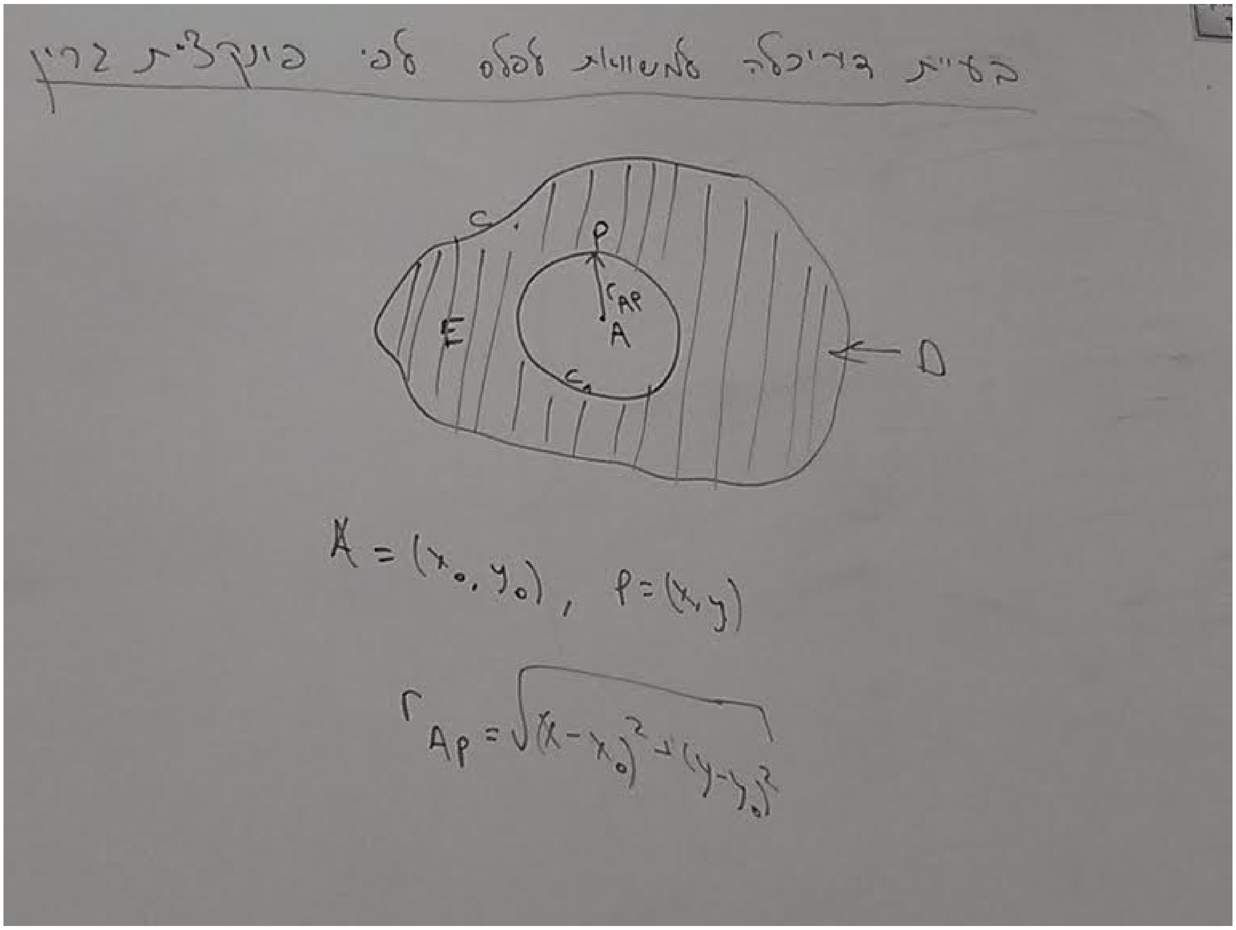
- לשים לב שינץ לפעמים אוהב לכתוב למשל

$$u_{xx}-u_{tt}=1$$

כלומר הוא רושם הפוך כדי להכשיל. רק לבדוק שפותרים נכון לפי דף הנוסחאות. זו הכפלה ב(-1) שמשנה את כל התרגיל. ע"ע התקרית לפני 3 שנים.

13 תרגול 13

בעיית דיריכלה למשוואת לפלס לפי פונקציית גרין



$$A = (x_0, y_0)\,, P = (x, y)\,, r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

1. $\omega = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ הרמונית.

הוכחה:

צ"ל ש

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x-x_0}{r}=\frac{1}{r}\left(x-x_0\right)\\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{1}{r}\left(y-y_0\right)\\
\frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{\partial \omega}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{\left(x-x_0\right)}{r^2}\\
\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\left(x-x_0\right)}{r^2}\right)\\
&= \frac{\left(x-x_0\right)^2-\left(y-y_0\right)^2}{r^4}\\
\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= \frac{\left(y-y_0\right)^2-\left(x-x_0\right)^2}{r^4}
\end{aligned}
$$

ונקבל שמתקיים

$$
\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}=0
$$

ולכן $\omega=\ln\left(\frac{1}{r}\right)$ הרמונית. הוכחנו שω הרמונית ב־E. נסמן ω_1= הפתרון של בעיית דיריכלה ב־D עם תנאי השפה:

$$
\begin{cases}
\omega_1\mid_r=\omega\mid_r\\
\omega_1\xrightarrow{H}0 & (*)\\
\omega_1\to E
\end{cases}
$$

2. נגדיר פונקציית גרין

$$
\begin{aligned}
G\left(P,A\right) &= G\left(x,y,x_0,y_0\right)=\omega_1-\omega=\omega_1-\ln\left(\frac{1}{r}\right)\\
G\mid_C &= 0 \qquad (**)\\
u\mid_\Gamma=u\mid_C &= \bar{u}
\end{aligned}
$$

נשתמש במשפט גרין ($\underline{u,v}$ פונקציות הרמוניות):

$$
\oint_{C_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n_1}-G\frac{\partial u}{\partial n_1}\right)ds+\oint_C\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-G\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=0
$$

נשתמש בתנאי השפה ונקבל

$$
\oint_\Gamma G\frac{\partial u}{\partial n}ds=0
$$

נעביר $A\left(x_0,y_0\right)$ לקואורדינטות פולאריות

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial n_1}=-\frac{\partial}{\partial r}\\
r=r_{AP}=\epsilon \quad d_s=\epsilon d\varphi
\end{cases}
$$

$$\oint_\Gamma u\frac{\partial G}{\partial r}ds=\epsilon\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial G}{\partial r}-G\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\varphi$$

צד שמאל של (1) לא תלוי ב־ϵ. אם נעבור לגבול ונציב $G=\omega_1-\ln\left(\frac{1}{r}\right)$ נקבל:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\int_0^{2\pi}\left(u\frac{\partial G}{\partial r}-G\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\varphi=2\pi u\left(x_0,y_0\right)$$

לפי כלל לופיטל $\epsilon\ln\epsilon\xrightarrow{\epsilon\to 0}0$ ולכן

$$\boxed{u\left(x_0,y_0\right)=\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma\bar{u}\frac{\partial G}{\partial n}ds}$$