<u>**משפט**</u>: נניח X מ"ט. התנאים הבאים שקולים:

1. X קומפקטי והאוסדורפי (ז"א $X \in Comp \cap T_2$).
2. X הומיאומורפי לתת קבוצה סגורה של קובית Tychonoff $[0,1]^S$.

<u>הוכחה</u>: $2 \Leftarrow 1$

$[0,1]^S \in Comp$ (משפט Tychonoff). תת קבוצה סגורה גם קומפקטית. T_2 תכונה כפלית ותורשתית. לכן $X \in Comp \cap T_2$.

$1 \Leftarrow 2$

נניח $X \in Comp \cap T_2$. מ"ל שקיים שיכון טופולוגי $\mathrm{f} : X \to [0,1]^S$ עבור S מסוים.

הוכחנו ש $Comp \cap T_2 \subset T_4$. נשתמש במשפט *Urysohn* $T_4 = T_4^{func}$.

לכל זוג של נקודות שונות $a,b \in X$ נבחר בפונקציה רציפה
$f_{a,b} : X \to [0,1], \mathrm{f(a)} = 0, \mathrm{f(b)} = 1$.

אוסף של כל הפונקציות שנבחרו $\mathrm{S} := \{ f_s = f_{a,b} \mid a \neq b \}$ (ז"א $\mathrm{s} = (a,\mathrm{b}), a \neq b$)

משרה פונקצית האלכסון $f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$ $f : X \to [0,1]^S$.

הפונקציה היא רציפה (הוכחנו ...) "מפרידה נקודות" ז"א היא חח"ע.

לפי **משפט השיכון** נקבל שהפונקציה היא מגדירה שיכון טופולוגי (על קבוצה סגורה).

☺

<u>**משפט**</u> *(האוניברסליות של קוביות* Tychonoff*)*

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in T_{3.5}$
2. X משוכן לתוך קובית Tychonoff מסוימת $[0,1]^S$.

<u>הוכחה</u>:

$2 \Leftarrow 1$

$X \in T_{3.5}$ לכן קיים אוסף פונקציות $\{f_s : X \to [0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות (למשל $C(X,[0,1])$). אז פונקצית האלכסון $f = \Delta_{s\in S} f_s : X \to [0,1]^S$

שיכון טופולוגי לפי המשפט על פונקצית האלכסון.

$1 \Leftarrow 2$

לפי משפט על המכפלה (גם Tychonoff) $[0,1]^S \in Comp$. האוסדופיות תכונה כפלית.

לכן $[0,1]^S \in Comp \cap T_2$. עכשיו נזכיר ש $Comp \cap T_2 \subset T_4 \subset T_{3.5}$ ו $T_{3.5}$ תכונה תורשתית.

☺

<u>תוצאה חשובה</u>: $X \in T_{3.5}$ אם ורק אם ל X יש קומפקטיפיקציה.

<u>משפט</u> (מטריזציה)

התנאים הבאים שקולים:

1. $X \in Metriz \cap B_2$ (שקול: $X \in Metriz \cap Sep$).
2. X משוכן לתוך קובית Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

<u>הוכחה</u>:

$2 \Leftarrow 1$

בגלל המשפט הקודם מ"ל שקיים אוסף בן מניה $\{f_s : X \to [0,1]\}_{s\in S}$ שמפריד נקודות וקבוצות סגורות.

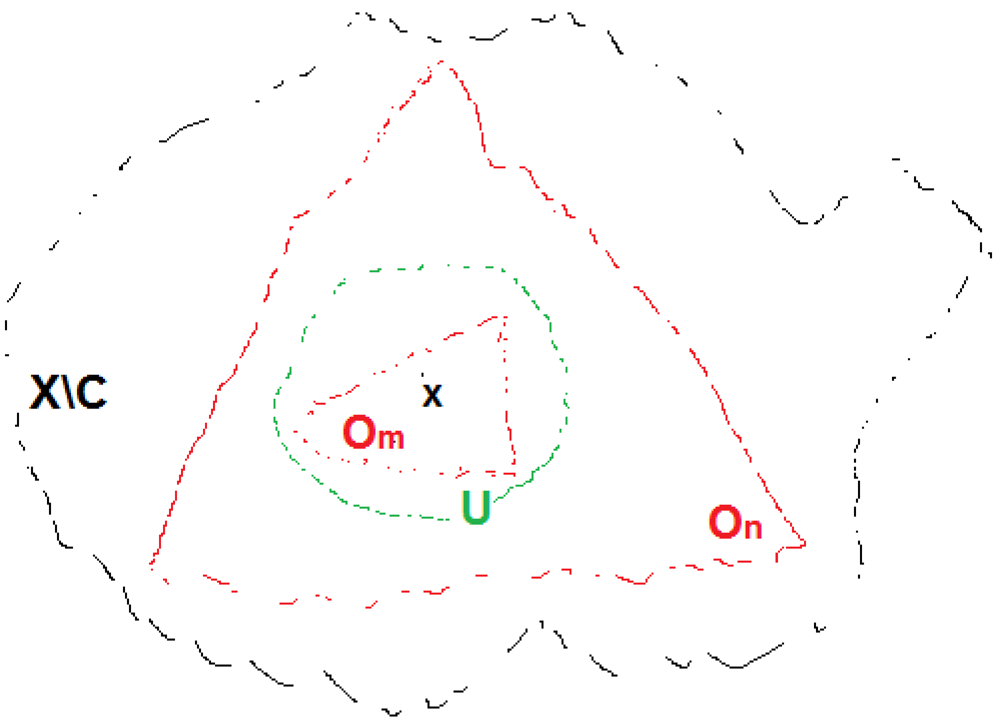
נתון $X \in Metriz \cap B_2$. קיים בסיס בן מניה $\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

לכל זוג O_n, O_m עם התנאי $\overline{O_m} \subseteq O_n$ נבחר פונקציה רציפה אחת $f_{m,n} : X \to [0,1]$ כך ש $f_{m,n}(\overline{O_m}) = 0,\ f_{m,n}(X \setminus O_n) = 1$ (זה אפשרי כי $Metriz \subseteq T_4 = T_4^{func}$)

אז אוסף S של פונקציות שנבחרו הוא בן מניה.

בגלל המשפט "פונקצית האלכסון" מ"ל ש S מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

נניח $x \notin C$ ו C סגורה. $\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לטופולוגיה לכן אפשר לבחור סביבה פתוחה $O_n \in \gamma$ כך ש $x \in O_n \subset X \setminus C$.



במרחב מטריזבילי X קיימת סביבה $U \in N(x)$ כך ש $\overline{U} \subseteq O_n$

(למשל כדור $x \in U = B(x,\varepsilon) \subset \overline{B(x,\varepsilon)} \subset B[x,\varepsilon] \subset O_n$).

$\gamma = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בסיס לכן קיים $O_m \in \gamma$ כך ש $x \in O_m \subseteq U$. נקבל

$$x \in O_m \subseteq \overline{O_m} \subseteq \overline{U} \subseteq O_n \subseteq X \setminus C$$

אז פונקצית אוריסון $f_{m,n} : X \to [0,1]$ מפרידה x, C (כי היא מפרידה $X \setminus O_n$,$\overline{O_m}$)

$2 \Leftarrow 1$

$[0,1]^{\mathbb{N}} \in Metriz \cap B_2$ וכך גם כל תת מרחב שלו (כי $Metriz, B_2$ תכונות תורשתיות).

☺

<u>מידע:</u>

א. אפשר להוכיח (משפט Urysohn) $T_3 \cap B_2 \subset Metriz$

(ראו למשל ספר מצויין: J.R. Munkres, Topology).

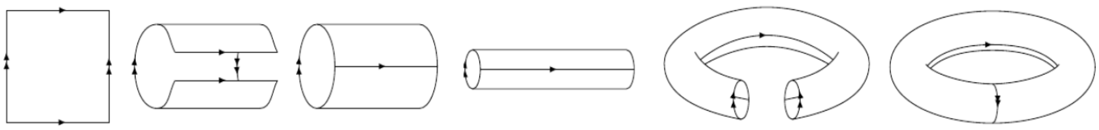
לכן במשפט הקודם התנאי הראשון ניתן להחליש ל $X \in T_3 \cap B_2$.

ב. $[0,1]^{\mathbb{N}}$ משוכן לתוך מרחב הילברט l_2 (מצדיק את השם: קובית הילברט) ע"י

$$\varphi : [0,1]^{\mathbb{N}} \to l_2 \quad (a_1, a_2, a_3, \cdots) \mapsto (a_1, \tfrac{1}{2}a_2, \tfrac{1}{3}a_3, \cdots)$$

טופולוגית מנה -- Quotient topology

למדנו מספר אפשרויות לבנות מרחבים טופולוגיים חדשים בעזרת נתונים. בין היתר:
תת מרחב, מכפלה, סכום. אפשרות נוספת וגם מאוד חשובה היא "מנה טופולוגית".
למשל אפשר לקבל טורוס 2-ממדי כמרחב מנה של ריבוע באופן הבא:



This image from http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png.

נניח (X,τ) מ"ט ואנחנו רוצים "להדביק חלקים מסוימים".

איך מגדירים טופולוגיה מתאימה ? מה הן ההגדרות המתאימות ?

<u>**תזכורת**</u> (מתורת הקבוצות) נניח $\sim$ יחס שקילות במרחב (X,τ). נסמן:

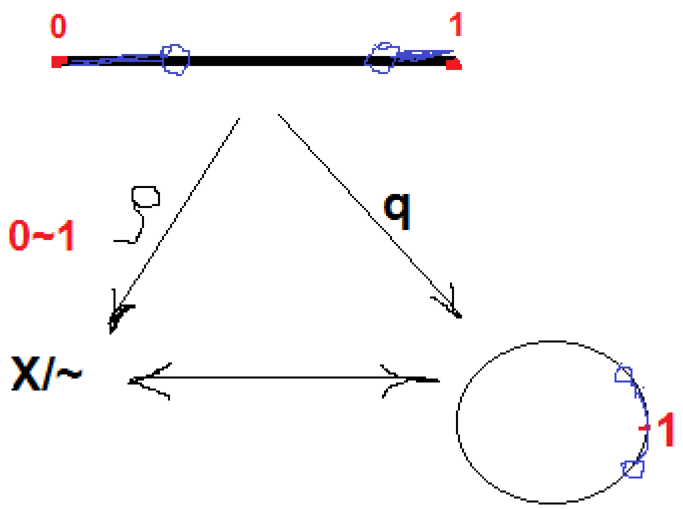
- $[a]:=\{x\in X \mid a\sim x\}$ מחלקה של איבר a
(תמיד $a\in[a]$ ויש חלוקה $X=\coprod_{a\in X}[a]$)
- $X/\sim=\{[a]:a\in X\}$ "קבוצת המנה" היא קבוצת המחלקות
- $\rho:X\to X/\sim \quad a\mapsto[a]$ "פונקציה (העתקה) טבעית" (תמיד **על**)

<u>**שאלה**</u>: איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב $X/\sim$ כאשר X מ"ט ?

<u>**שקול**</u>: נתונה פונקציה <u>על</u> $q:X\to Y$. איך להגדיר "טופולוגיה טבעית" ב Y ?

שימו לב: אם נגדיר $a\sim b \Leftrightarrow q(a)=q(b)$ אז נקבל יחס שקילות כך ש

Y וקבוצת מנה $X/\sim$ הם באותו תפקיד.



רעיון: להגדיר טופולוגיה σ ב Y כטופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $\mathrm{q}: X \to Y$.

<u>**הגדרה**</u>: נניח (X,τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $\mathrm{q}: X \to Y$. אומרים ש σ **טופולוגית המנה** (ביחס לפונקציה $\mathrm{q}:(X,\tau) \to Y$) אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $\mathrm{q}:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ רציפה.

ב. אם $\mathrm{q}:(X,\tau) \to (Y,\lambda)$ רציפה אז $\lambda \subseteq \sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $\mathrm{q}:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ היא **פונקצית מנה** (או **העתקת מנה**).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

<u>**תאור של טופולוגית המנה**</u>: $\sigma := \{O \subseteq Y \mid \quad q^{-1}(O) \in \tau\}$

ז"א קבוצה ב Y פתוחה אם (ורק אם) המקור פתוח ב X.

שקול: קבוצה ב Y סגורה אם (ורק אם) המקור סגור ב X (מדוע ?)

תרגיל: כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה.

תרגיל: הרכבה של פונקציות מנה היא גם מנה.

משפט (טופולוגיה חזקה)

נניח $q:X\to Y$ פונקציית מנה ונתונה פונקציה $f:Y\to Z$.

אז פונקציה f רציפה אם (ורק אם) רציפה ההרכבה $f\circ q:X\to Z$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f\circ q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: נניח $f\circ q:X\to Z$ רציפה. צ"ל $f:Y\to Z$ רציפה.

ש"ל $f^{-1}(O)$ פתוחה ב Y לכל O פתוחה ב Z.

נתון ש $q:X\to Y$ מנה. לכן ש"ל $q^{-1}(f^{-1}(O))$ פתוחה ב X. אבל

$q^{-1}(f^{-1}(O))=(f\circ q)^{-1}(O)$ ונתונה רציפות של $f\circ q:X\to Z$.

☺

תוצאה: נניח $q:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ פונקציית מנה. אז טופולוגית מנה σ ב Y היא טופולוגיה הכי חזקה שמבטיחה רציפות $q:X\to Y$.

ז"א אם $q:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ רציפה אז $\gamma\subseteq\sigma$.

הסבר: נשתמש במשפט "טופולוגיה חזקה" כאשר בתפקיד $f:Y\to Z$ ניקח $\mathrm{id}:(Y,\sigma)\to(Y,\gamma)$.

משפט: (תנאי מספיק: פתיחות, סגירות)

אם פונקציה $q:X\to Y$ על, רציפה, פתוחה (או וסגורה)

אז $q:X\to Y$ היא פונקציית מנה.

הוכחה: נניח $q^{-1}(O)$ **פתוחה** ב X עבור $O\subseteq Y$. צ"ל O פתוחה ב Y.

לפי הנתון הפונקציה היא פתוחה לכן התמונה $q(q^{-1}(O))$ היא גם פתוחה.

אבל q **על** לכן $q(q^{-1}(O))=O$ חייבת להיות פתוחה.

☺

תוצאה: כל הטלה $p_{i_0}:\prod_{i\in I}X_i\to X_{i_0}$ היא פונקצית מנה.

תוצאה: נניח $f:X\to Y$ רציפה, על $X\in Comp, Y\in T_2$. אז f פונקצית מנה.

דוגמה: $f:X=[0,1]\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\|z\|=1\}\quad f(x)=cis(2\pi x)$

היא פונקצית מנה (הפונקציה היא על רציפה **וסגורה**).

הערה: כאן אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X\to X/\sim\,\cong Y,\quad 0\sim 1$$

דוגמה: $id:(\mathbb{R},\tau_{discr})\to\mathbb{R}$ רציפה על אבל **לא פונקצית מנה**.

הסבר: המקור $id^{-1}(\{5\})=\{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R},\tau_{discr})$ אבל לא ב $\mathbb{R}$.

דוגמה: פונקציה רציפה $id:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1=\tau_2$.

דוגמה: $h:X=[0,1)\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\|z\|=1\}\quad h(x)=cis(2\pi x)$

הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $A:=\{z\in T\,|\,0\le\arg(z)<\frac{\pi}{2}\}$ המקור $h^{-1}(A)=[0,\frac{1}{4})$ פתוח ב $[0,1)$

אבל A לא פתוח ב T.

אזהרות:

1. להיות פונקצית מנה – לא תורשתית. ז"א יתכן ש $f : X \to Y$ העתקת מנה $A \subseteq X$. ופונקצית על שמושרית $f_A : A \to f(A)$ היא לא תמיד מנה.

למשל להתבונן בדוגמאות שהיו עם $A = [0,1) \subset X = [0,1]$.

דוגמה נוספת: $p_1 : X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ לא מנה.

2. מרחב מנה יכול להיות מאוד מסובך ("יותר מהמקור"). למשל:

ריבוע דו-ממדי הוא מרחב מנה של קטע (מדוע ?)

כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב מנה של קבוצת קנטור (מדוע ?).

3. פונקצית מנה יכולה להיות לא פתוחה ולא סגורה.

דוגמה: עבור הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$, $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$

טופולוגית מנה על $Y = \{0,1\}$ היא טופולוגית סרפינסקי $\sigma = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}$.

$f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ לא פתוחה ולא סגורה (דוגמה נוספת בהמשך).

בנוסף שימו לב שמרחב מנה (שהוא מרחב סרפינסקי) לא T_1 .

4. בהעתקות מנה אקסיומות הפרדה לא תמיד נשמרות.

הערה: מרחב מנה הוא בעל תכונת T_1 אם"ם כל מחלקת שקילות היא סגורה.

דוגמה: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. אז מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$ הוא בעל טופולוגיה טריוויאלית (מה העוצמה של $\mathbb{R}/\sim$?)

משפט: (**הומיאומורפיזם ומנה**)

נניח $f : X \to Y$ פונקציה רציפה, על + חח"ע. אז f מנה אם ורק אם f הומיאומורפיזם.

הסבר: כיוון אחד ברור (כי כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה).

בכיוון השני נניח $f : X \to Y$ מנה וחח"ע. צ"ל f הומיאומורפיזם. מ"ל f פתוח.

לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ מתקיים תמיד $U \subseteq f^{-1}(f(U))$. אצלנו בעצם $U = f^{-1}(f(U))$ (בגלל f חח"ע).

לפי הגדרת טופולוגית מנה קבוצה $O := f(U)$ היא חייבת להיות פתוחה ב Y.

משפט (תנאי מספיק "צמצום")

נניח $f_1 : X \to Y$ $f_2 : Y \to Z$ פונקציות רציפות.

אם ההרכבה $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$ היא פונקצית מנה אז גם $f_2 : Y \to Z$ פונקצית מנה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_2 \circ f_1"'] & Y \arrow[d, "f_2"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הוכחה: צ"ל $f_2 : Y \to Z$ מנה. נניח $f_2^{-1}(A)$ פתוח ב Y. לפי הרציפות של $f_1 : X \to Y$ נקבל ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A))$ פתוח ב X. ברור $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(A)$. אבל נתון ש $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$ פונקצית מנה. לכן A פתוחה.

☺

תוצאה: נניח $f : Y \to Z$ רציפה על וקיימת תת קבוצה $X \subseteq Y$ כך שצמצום $f_X : X \to Z$ הוא על ופונקצית מנה. אז גם $f : Y \to Z$ מנה.

הסבר: נפעיל משפט " הכללת קריטריון מנה" באופן הבא

כאשר $i : X \to Y$ שיכון טבעי

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "fx"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

הגדרה: נניח $f : X \to Y$ ונתון יחס שקילות $\sim$ ב Y (או נתונה חלוקה של Y).

אומרים שפונקציה $f : X \to Y$

א. **מכבדת** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$.

ב. **מגדירה** את היחס $\sim$ אם $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

תכונות:

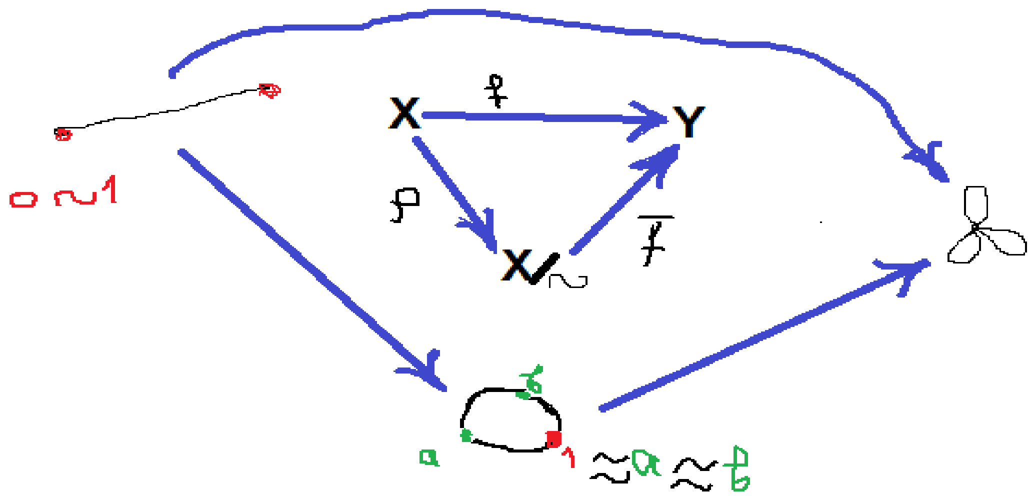
1. $f : X \to Y$ **מכבדת** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על הבאה

$\bar{f}([x]) = \bar{f}(\rho(x)) = f(x)$ $\quad \bar{f} : X/\sim \to Y \quad$ (ז"א $f = \bar{f} \circ \rho$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & Y \\ & X/\sim \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

הערה: פירוש אינטואיטיבי -- יתכן ו $f : X \to Y$ מדביקה יותר נקודות מיחס שקילות $\sim$.

למשל



2. $f : X \to Y$ רציפה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim \to Y$ רציפה (משפט "טופולוגיה חזקה").

3. $f : X \to Y$ מנה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim \to Y$ מנה (משפט "צמצום").

4. $f:X\to Y$ **מגדירה** את היחס $\sim$ אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על $\overline{f}:X/\sim\,\to Y$ והיא חח"ע.

משפט (קריטריון למנה)

נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה על. נסמן ב $X/\sim_f$ מרחב מנה כאשר $\sim_f$ הוא היחס שמוגדר ע"י $f:X\to Y$ (ז"א $a\sim_f b\Leftrightarrow f(a)=f(b)$).

התנאים הבאים שקולים:

א. $f:X\to Y$ מנה.

ב. פונקציה מושרית $\overline{f}:X/\sim_f\,\to Y$ היא הומיואומורפיזם

הוכחה:

א $\Leftarrow$ ב

ברור כי $f=\overline{f}\circ\rho$ הרכבה של שתי פונקציות מנה. כי $\rho:X\to X/\sim_f$ פונקצית מנה (כי בחרנו $X/\sim_f$ בטופולוגית מנה) ו $\overline{f}$ הומיאומורפיזם.

ב $\Leftarrow$ א

נתון $f:X\to Y$ מנה. לפי תכונה 3 נקבל $\overline{f}:X/\sim_f\,\to Y$ גם מנה. אבל $\overline{f}:X/\sim_f\,\to Y$ (על ו) חח"ע לפי תכונה 4.

לכן לפי משפט "**הומיאומורפיזם ומנה**" נקבל ש $\overline{f}:X/\sim_f\,\to Y$ הומיאומורפיזם.

☺

הערה חשובה: תכונות הנ"ל עוזרות להוכיח הומיואומופיזם עם מרחבי מנה מסוימים.

דוגמה: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל**.**

הסבר: נגדיר פונקציה

$$f:X=[0,1]\to Y=T=\{z\in\mathbb{C}\mid \|z\|=1\}\quad \mathrm{f(x)}=(\cos(2\pi\,\mathrm{x}),\sin(2\pi\,\mathrm{x}))$$

הפונקציה היא מנה (כפונקציה רציפה סגורה על מרחב האוסדורף).

$f:X\to T$ מגדירה את היחס $0\sim 1$ (כמובן $x\sim x$).

לפי משפט קריטריון קיים הומיאומורפיזם $\overline{f}:[0,1]/\sim_f \ \to T$.

לכן $T \cong [0,1]/\sim_f$.

תרגיל: הוכיחו:

א. $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פונקצית מנה.

ב. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong T$

(כאשר $\mathbb{R}/\mathbb{Z}=\{x+\mathbb{Z}\mid x\in\mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

הסבר של א

(דרך 1) אפשר להשתמש בתוצאה קודמת עבור ההכלה $\mathrm{i}:[0,1]\to\mathbb{R}$.

(דרך ב) אפשר להוכיח שבעצם $f:\mathbb{R}\to T,\ f(\mathrm{x})=\mathrm{cis}(2\pi\,\mathrm{x})$ פתוחה.

הסבר של ב

כאן אפשר להשתמש בחלק א יחד עם משפט קריטריון למנ אם ניקח בחשבון שיחס שקילות $\sim_f$ כאן בדיוק נותן יחס הבא $a\sim_f b \Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a\equiv b \bmod \mathbb{Z}$.

הערה: מחלקת שקילות של $a\in\mathbb{R}$ הוא $[a]=a+\mathbb{Z}$. ז"א תאור אחר של היחס הוא $a\sim_f a+n \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

תרגיל: * במעגל יחידה $T=\{z\in\mathbb{C}:\|z\|=1\}$ במישור המרוכב נגדיר יחס שקילות $v\sim -v$. הוכיחו שמרחב מנה הוא הומיאומורפי למעגל עצמו T.

פתרון: $\mathrm{f}:\mathrm{T}\to\mathrm{T},\mathrm{f}(\mathrm{v})=\mathrm{v}^2$ היא פונקצית מנה (מדוע ?). היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $v\sim -v$.

מידע: כאו בעצם אנחנו מחשבים "מרחב המסלולים" (אורביטות) לגבי פעולה טבעית חבורה ציקלית $\mathbb{Z}_2=\{\mathrm{e},\sigma\}$ עם שני איברים על המעגל T (הפעולה היא היפוך הסימן)

$$\mathbb{Z}_2\times T\to T \quad \sigma(v)=-v$$

תרגיל: הוכיחו $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$

(כאשר $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \{(x,y)+\mathbb{Z}^2 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגית מנה)

פתרון: נתחיל מהפונקציה $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (cis2\pi x, cis2\pi y)$ $f:\mathbb{R}^2 \to T^2$.

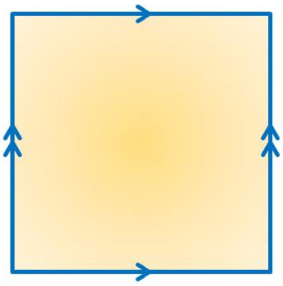
צמצום הפונקציה $f:[0,1]^2 \to T^2$ פונקצית מנה. לכן לפי **משפט** (תנאי מספיק "צמצום") גם $f:\mathbb{R}^2 \to T^2$ מנה.

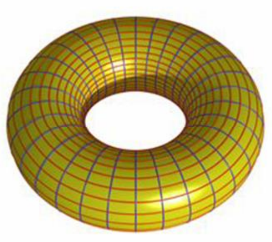
כעת לפי **משפט** (קריטריון למנה) נקבל $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$.

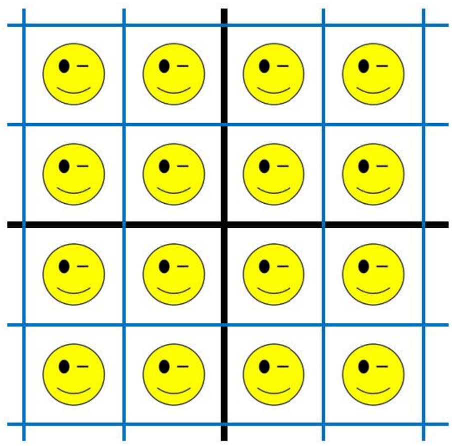
כאן יחס שקילות מתאימה היא $\forall n,m \in \mathbb{Z}$ $(a,b) \sim_f (a+n, b+m)$ המחלקות הן $\{(x,y)+\mathbb{Z}^2 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. לכן קבוצת מנה מתאימה היא בדיוק $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

לכן מרחב מנה $\mathbb{R}^2/\sim_f$ כאן הוא בעצם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

כבר הוכחנו הומאומורפיזם $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong T^2$. לכן גם $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$.







מידע: מי שלמד תורת החבורות בהחלט מבין שקבוצת מנה $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ היא חבורת מנה. בשפה יותר מתמטית כאן מדובר על איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$

תרגיל: הוכיחו שאם ב $\mathbb{R}$ לכוץ קטע $[0,1]$ לנקודה 0 אז מרחב מנה הומאומורפי ל $\mathbb{R}$.

רמז: נגדיר את הפונקציה

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \mathrm{f(x)}=\begin{Bmatrix} x & x\le 0 \\ 0 & 0\le x\le 1 \\ x-1 & 1\le x \end{Bmatrix}$$

הפונקציה היא מנה (מדוע ?) "ומדביקה" את כל הנקודות של קטע $[0,1]$ ...

תרגילים נוספים:

תרגיל: בספירה $S_2 := \{\mathrm{v}\in\mathbb{R}^3 \mid \|v\|=1\}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$(\mathrm{x}_1,y_1,z_1)\sim(\mathrm{x}_2,y_2,z_2)\Leftrightarrow(\mathrm{x}_1,y_1)=(\mathrm{x}_2,y_2)$$

לתאר מרחב מנה $S_2/\sim$.

תרגיל: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x\sim -x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

מה הוא מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$?

תרגיל: ב $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x\sim y\Leftrightarrow \sin x=\sin y$$

מה הוא מרחב מנה $\mathbb{R}/\sim$?

תרגיל: * מרחב מנה $\mathrm{S}\times[0,1]/\sim$ של גליל $\mathrm{S}\times[0,1]$ כשמכוצים את כל הנקודות של בסיס $\mathrm{S}\times\{0\}$ לנקודה אחת הומיאומורפי לי דיסק סגור דו-מימדי

רמז: פונקציה $f(\mathrm{x,t})=\mathrm{tx}$ $\quad \mathrm{f}:\mathrm{S}\times[0,1]\to\mathrm{D}$.

תרגיל: נניח D עיגול יחידה במרוכבים $\mathbb{C}$. נגדיר יחס שקילות $\sim$ ב D ע"י

$$(x,y)\sim(x,-y)$$

הוכיחו ש מרחב מנה $\mathrm{D}/\sim$ הומאומורפי ל D.

תרגיל: הוכיחו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

הגדרה: נניח Y תת מרחב טופולוגי של X. פונקציה $f : X \to Y$ נקראת "רטרקציה" retraction אם היא רציפה **על** כך ש $f(y) = y \quad \forall y \in Y$

(שקול: f רציפה על ומתקיים $f \circ f = f$)

תרגיל:* נניח $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x \geq 0 \vee y = 0\}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

נגדיר פונקציה $f(x,y) = x$ $f : X \to \mathbb{R}$ (צמצום של הטלה).

הוכיחו ש f פונקצית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.