חשבון אינפינטסימלי 2 | תש"ע מועד ב'

פתרון המבחן | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

מרצה: שחר נבו

(לפי מיקוד תשפ"ב)

שאלה 1

ב) חשב $lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-e^{-x^2/2}}{x^4}$

(סעיף ב)

נשים לב שהמכנה שואף ל0, וגם המונה ל0 ($1-1=0$) לכן נפעיל לופיטל

$$lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-e^{-x^2/2}}{x^4}=lim_{x\to 0}\frac{-sin(x)+xe^{-x^2/2}}{4x^3}$$

ושוב לופיטל

$$=lim_{x\to 0}\frac{-cos(x)+e^{-x^2/2}-x^2e^{-x^2/2}}{12x^2}=lim_{x\to 0}\frac{sin(x)-xe^{-x^2/2}-2xe^{-x^2/2}+x^3e^{-x^2/2}}{24x}$$

$$=lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-e^{-x^2/2}+x^2e^{-x^2/2}-2e^{-x^2/2}+2x^2e^{-x^2/2}+3x^2e^{-x^2/2}-x^4e^{-x^2/2}}{24}$$

$$=\frac{1-1-2}{24}=\boxed{\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{12}}}$$

שאלה 2

הראה כי למשוואה $x = cot(x)$ פתרון יחיד ב- $[0, \frac{\pi}{2}]$

(פתרון)

ראשית, עבור $x = 0$ לא מוגדר. ו $x = \frac{\pi}{2}$ הינו פתרון למשוואה.
נראה שאין פתרון בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$
נגדיר $f(x) = x - cot(x)$, נראה שלא מתאפסת.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{sin^2(x)}$$

מתקיים בתחום

$$0 < sin(x) < 1$$

לכן

$$1 - \frac{1}{sin^2(x)} < 1 - \frac{1}{1} = 0$$

כלומר היא יורדת,
נניח בשלילה שקיים x' נוסף שהוא פתרון למשוואה, אזי הקטע $[x', 1]$ קבוע בסתירה.

שאלה 3

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} cos^4(x)dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-2}dx$$

$$\int_0^1 x^2 log(x)dx$$

(סעיף א)

ניעזר בזהויות טריגונומטריות

$$cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$$

$$\frac{cos(2x)+1}{2} = cos^2(x)$$

ונעלה בריבוע

$$cos^4(x) = \frac{cos^2(2x) + 2cos(2x) + 1}{4}$$

נציב את $cos^2(2x)$ לפי זהות לעיל.

$$= \frac{\frac{cos(4x)+1}{2} + 2cos(2x) + 1}{4}$$

ונחשב

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} cos^4(x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cos(4x)}{8} + \frac{cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}dx$$

$$= \left[\frac{sin(4x)}{32} + \frac{sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\boldsymbol{\frac{-\sqrt{3}}{32} + \frac{\pi}{16}}}$$

(סעיף ב)

$$\int \frac{x^2}{x^2-2}dx = \int 1+\frac{2}{x^2-2}dx$$

נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{2}{x^2-2} = \frac{A}{x-\sqrt{2}} + \frac{B}{x+\sqrt{2}}$$

$$2 = Ax+\sqrt{2}A+Bx-\sqrt{2}B$$

$$(A+B)x+(\sqrt{2}A-\sqrt{2}B-2)=0$$

קיבלנו מערכת משוואות

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \sqrt{2}A-\sqrt{2}B-2=0 \end{cases}$$

נקבל $A=\frac{\sqrt{2}}{2}, B=\frac{-\sqrt{2}}{2}$
לבסוף,

$$\int \frac{x^2}{x^2-2}dx = \int 1+\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})}{x-\sqrt{2}}+\frac{-(\frac{\sqrt{2}}{2})}{x+\sqrt{2}}dx$$

$$= \boxed{\boldsymbol{x+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(log(x-\sqrt{2})-log(x+\sqrt{2})\right)+c}}$$

(סעיף ג)

$$\int_0^1 x^2 log(x)dx$$

נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\begin{bmatrix} v=\frac{x^3}{3} & u=log(x) \\ dv=x^2dx & du=\frac{dx}{x} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 udv = uv|_0^1 - \int_0^1 vdu$$

$$= \left[\frac{log(x) \cdot x^3}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \left[\frac{log(x) \cdot x^3}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \left[\frac{log(x) \cdot x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_0^1$$

$$= \left(lim_{x \to 0^+} 0 - \frac{log(x) \cdot x^3}{3}\right) - \frac{1}{9} = \left(lim_{x \to 0^+} \frac{log(x) \cdot x^3}{3}\right) - \frac{1}{9}$$

נחשב

$$lim_{x \to 0^+} \frac{log(x) \cdot x^3}{3} = lim_{x \to 0^+} \frac{log(x)}{\frac{3}{x^3}}$$

נפעיל לופיטל (המקרה "$\frac{\infty}{\infty}$"),

$$lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^3}} = lim_{x \to 0^+} 3x^2 = 0$$

לבסוף נקבל

$$\boxed{\mathbf{\frac{-1}{9}}}$$

שאלה 4

ב) תהי $f_0(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,a]$. נגדיר סדרת פונקציות ב-$[0,a]$ באופן הבא:

$$f_n(x) := \int_0^x f_{n-1}(t)dt$$

לכל $n \geq 1$, $0 \leq x \leq a$. הוכח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לס ב$[0,a]$.

(פתרון)

מאינטגרביליות $f_0(x)$, היא חסומה ושינו M כך ש $|f_0(x)| \leq M$

כעת מטענה ידועה

$$|f_1(x)| = \left|\int_0^x f_0(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_0(t)|\, dt \leq \int_0^x Mdt = Mx$$

$$|f_2(x)| = \left|\int_0^x f_1(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_1(t)|\, dt \leq \int_0^x Mxdt = \frac{Mx^2}{2}$$

ובאופן כללי באינדוקציה

$$|f_n(x)| \leq \frac{Mx^n}{n!}$$

בסיס הראינו.

צעד יהי n שהטענה נכונה בעבורו, נראה בעבור $n+1$,

$$|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_n(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_n(t)|\, dt \leq \int_0^x \frac{Mx^n}{n!}dt = \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

וסיימנו.

כעת נראה כי

$$\epsilon_n := \begin{cases} sup_{x\in[0,a]}|f_n(x) - f(x)| & \text{exists supermum if} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \to 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq |\frac{Mx^n}{n!}| \leq |\frac{Ma^n}{n!}|$$

נשים לב כי $\frac{Ma^n}{n!} \to 0$ ובפרט קיים N שממנו ואילך נקבל $< \epsilon$ כדרוש. $\blacksquare$

שאלה 5

א) מצאו רדיוס התכנסות r עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-2)^n)x^n$ ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.
ב) חשב הסכום $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$

(סעיף א)

$$r = \frac{1}{limsup\sqrt[n]{|1-(-2)^n|}}$$

למדנו באינפי 1, שאם ישנן שתי תתי סדרות שמכסות את הסדרה ומתכנסות לאותו גבול אזי זהו גבול הסדרה, נסתכל על הזוגיים והאי זוגיים

$$r_1 = \frac{1}{limsup\sqrt[2n]{|1-4^n|}} = \frac{1}{2}$$

$$r_2 = \frac{1}{limsup\sqrt[2n+1]{|1+2\cdot 4^n|}} = \frac{1}{2}$$

בעבור $x=\frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-2)^n)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - (-1)^n$$

אשר לא מתכנס.
בעבור $x=-\frac{1}{2}$, בדומה

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-2)^n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

סך הכל תחום ההתכנסות $\mathbf{(-1,1)}$

(סעיף ב)

תחום ההתכנסות הוא

$$r = limsup\frac{1}{\sqrt[n]{n+2}} = 1$$

בעבור $x=1,-1$ לא נקבל התכנסות. סך הכל תחום התכנסות $(-1,1)$

נפצל לסכומים (נראה ששני הסכומים מתכנסים)

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + 2x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

f_n הן פונקציות גזירות, ובעבור $f_n(0)$ מקבלים התכנסות של הסדרה $f_n(x)$, לכן ניתן להפעיל גזירה איבר איבר.

$$= x\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' + \frac{2}{1-x} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' + \frac{2}{1-x}$$

$$= x\left(\frac{1}{1-x}\right)' + \frac{2}{1-x} = \boxed{\boldsymbol{\frac{-x+2}{(1-x)^2}}}$$

שאלה 6

נגדיר $f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

א) חשב $f'(0)$

ב) הראה כי f גזירה ב$\mathbb{R}$ מכל סדר.

(סעיף א)

$$f'(0) = lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\frac{sinh}{h}-1}{h}$$

$$= lim_{h\to 0}\frac{sinh-h}{h^2}$$

וניעזר בלופיטל (המקרה "$\frac{0}{0}$"),

$$= lim_{h\to 0}\frac{cos(h)-1}{2h} = lim_{h\to 0}\frac{-sin(h)}{2} = 0$$

(סעיף ב)

(פתרון של אורי מימון)

ידוע כי:

$$\frac{sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

כעת, רדיוס ההתכנסות הוא

סדרת המקדמים של טור החזקות הינה

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} & \text{even is n} \\ 0 & \text{odd is n} \end{cases}$$

וראינו בהרצאה שאם $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ אזי

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

כלומר

בעבור n זוגי $a_n = \frac{(-1)^{n/2}}{n+1}$
ובעבור n אי-זוגי $a_n = 0$
מקבלים סך הכל

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1} & \text{even is n} \\ 0 & \text{odd is n} \end{cases}$$

וקיבלנו שf גזירה מכל סדר ב$\mathbb{R}$ עבור $x = 0$,
אחרת, לכל $x \neq 0$ מדובר בפונקציה $\frac{sin(x)}{x}$ שגזירה מכל סדר ב$\mathbb{R}$.

∎