

תרגיל בית 2

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A . במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

2. נניח כי m הינה מידת לבג ו $A \subseteq \mathbb{R}$ הינה קבוצה מדידה בורל כך ש $m(A) > 0$. הוכיחו כי אם

$$B = \{x - y : x, y \in A\}$$

אזי B מכילה קטע פתוח לא ריק סביב 0.

3. נניח כי A הינה מדידה לבג ב \mathbb{R} ו

$$B = \bigcup_{x \in A} [x-1, x+1]$$

הוכיחו כי B הינה מדידה לבג.

4. שאלת בונוס(קשה): תהי m מידת לבג. בנו תת קבוצת בורל A של \mathbb{R} כך ש

$$0 < m(A \cap I) < m(I)$$

לכל אינטרוול פתוח I .