תרגיל בית 2

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A. במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

2. נניח כי m הינה מידת לבג ו $A \subseteq \mathbb{R}$ הינה קבוצה מדידה בורל כך ש $m(A) > 0$. הוכיחו כי אם

$$B = \{x - y : x, y \in A\}$$

אזי B מכילה קטע פתוח לא ריק סביב 0.

הדרכה:

i. נניח כי A חסומה אחרת התסכלו על הקבוצה $C = A \cap [-n, n]$ עבור n כזה כך ש כך ש $\mu(B) > 0$.

ii. הראו כי אם B אינה מכילה קטע סביב 0 אזי ניתן למצוא סדרה $c_n \to 0$ כך ש $\sum c_n < \infty$ כך ש $c_n \notin B$.

iii. הראו כי נובע ש $A_n = A + c_n$ זרות ומכאן של $\bigcup A_n$ מידה אינסופית בסתירה לעובדה ש $\bigcup A_n$ חסומה

3. נניח כי A הינה מדידה לבג ב $\mathbb{R}$ ו

$$B = \bigcup_{x \in A} [x-1, x+1]$$

הוכיחו כי B הינה מדידה לבג.

הדרכה:

i. הסתכלו על $\bigcup_{x \in A} (x-1, x+1)$ והסיקו כי זוהי קבוצה מדידה.

ii. בטאו את $B / \bigcup_{x \in A} (x-1, x+1)$ בעזרת הקבוצה A והסיקו כי גם היא מדידה.

4. שאלת בונוס(קשה): תהי m מידת לבג. בנו תת קבוצת בורל A של $\mathbb{R}$ כך ש

$$0 < m(A \cap I) < m(I)$$

לכל אינטרוול פתוח I.