

## תרגיל בית 2

1. בטופולוגיה, קבוצה  $A$  תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל  $x \in A$  ע"י איברים מ  $A$ . במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות. הראו כי קבוצת קנטור  $C$  הינה מושלמת.

2. נניח כי  $m$  הינה מידת לבג ו  $A \subseteq \mathbb{R}$  הינה קבוצה מדידה בורל כך ש  $m(A) > 0$ . הוכיחו כי אם

$$B = \{x - y : x, y \in A\}$$

אזי  $B$  מכילה קטע פתוח לא ריק סביב 0.

הדרכה:

i. הניחו ללא הגבלת הכלליות כי  $0 < m(A) < \infty$ . מצאו קבוצה פתוחה  $G$  כך ש  $G \supseteq A$  וגם

$$m(A \cap I) > \frac{3}{4}m(I) \text{ כך ש } m(A) > \frac{3}{4}m(G)$$

ii. הראו כי אם  $\delta = \frac{1}{2}m(I)$  נובע כי לכל  $x \in (-\delta, \delta)$  הקטע  $I \cup \{x + I\}$  מכיל את

$$A \cap I \cup \{x + A \cap I\} \text{ ואורכו קטן מ } \frac{3}{2}m(I) \text{ . הסיקו בעזרת הסעיף הקודם כי}$$

$$A \cap I \cap \{x + A \cap I\} \neq \emptyset$$

iii. הסיקו כי  $x \in B$ .

3. נניח כי  $A$  הינה מדידה לבג ב  $\mathbb{R}$  ו

$$B = \bigcup_{x \in A} [x-1, x+1]$$

הוכיחו כי  $B$  הינה מדידה לבג.

הדרכה:

i. הסתכלו על  $\bigcup_{x \in A} (x-1, x+1)$  והסיקו כי זוהי קבוצה מדידה.

ii. בטאו את  $B / \bigcup_{x \in A} (x-1, x+1)$  בעזרת הקבוצה  $A$  והסיקו כי גם היא מדידה.

4. שאלת בונוס(קשה): תהי  $m$  מידת לבג. בנו תת קבוצת בורל  $A$  של  $\mathbb{R}$  כך ש

$$0 < m(A \cap I) < m(I)$$

לכל אינטרוול פתוח  $I$  .