נכתב על ידי יהונתן רגב

רשימת משפטים וטענות

1 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. $\lambda = 0$ ערך עצמי של A אם ורק אם A לא הפיכה.

2 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של A אם ורק אם: $det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$.

3 יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. אם $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T, v וקטור עצמי של T המתאים לערך העצמי λ, אזי λ הוא גם ערך עצמי של A, המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B, $[v]_B$ וקטור עצמי של A המתאים לערך העצמי λ.

4 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של A. אז: המרחב העצמי V_λ הוא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{F}^n$.

5 יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T. אז: המרחב העצמי V_λ הוא תת מרחב וקטורי של V.

6 כפל עמודה - עמודה: תהיינה $A_{n\times m}, B_{m\times k}$ מטריצות. אז: $C_i(A \cdot B) = A \cdot C_i(B)$ לכל $1 \le i \le k$.

7 נסמן: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. אז: $A \cdot e_i = C_i(A)$.

8 תהי $A_{n\times n}$ הפיכה. נסמן $A = (v_1 \cdots v_n)$. אז: $\forall_{1\le i\le n}: A^{-1} \cdot v_i = e_i$.

9 דמיון מטריצות הינו יחס שקילות.

10 יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. יהיו B, B' שני בסיסים ל $- V$. יהיו A, A' שתי מטריצות מייצגות של T ביחס לבסיסים B, B' בהתאמה. תהי P מטריצת המעבר בין הבסיסים B' ו - B. אז: $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

11 מחלקת שקילות של יחס הדמיון הן כל המטריצות המייצגות את אותה העתקה.

12 לכסון מטריצות יכול להיות יעיל בחישוב חזקה של גדולה של מטריצה.

13 תכונות של מטריצות דומות: יהיו $A, A \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש: $A' \sim A$. מתקיים:

- $\det(A) = \det(A')$.
- $p_A(x) = p_{A'}(x)$.

14 למטריצות דומות יש אותה דרגה.

15 למטריצות דומות יש אותם ערכים עצמיים.

16 אם $A_{n\times n}$ לכסינה, אזי יש לה n ערכים עצמיים (ייתכן שחלקם שווים).

17 קריטריון כללי ללכסון מטריצה: מטריצה $A_{n\times n}$ לכסינה אם ורק אם במרחב $\mathbb{F}^n$ קיים בסיס B המורכב מווקטורים עצמיים של A. איברי בסיס זה הינם עמודות של מטריצה מלכסנת P.

18 קריטריון כללי ללכסון אופרטור: אופרטור $T: V \to V$ ניתן ללכסון $\leftrightarrow$ במרחב V קיים בסיס B המורכב מווקטורים עצמיים של T.

19 אם $T: V \to V$ אופרטור ליניארי, אז ניתן להגדיר את הפולינום האופייני שלו.

20 תהי $A_{n\times n}$ מטריצה כלשהי. מתקיים:

- $deg\ \ p_A(x) = n$.
- $p_A(x)$ הינו פולינום מתוקן.
- אם $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0$ אזי:
  $a_0 = (-1)^n \det(A)\, , a_{n-1} = -tr(A)$.

21 ע"ע $tr(A) = \sum$ (כולל ריבוי אלגברי).

22 ע"ע $\det(A) = \prod$ (כולל ריבוי אלגברי).

23 $n - rank(A) =$ ריבוי גאומטרי של ערך עצמי 0.

24 אם $g(x), f(x)$ פולינומים, $deg\ \ g(x) = m$ אזי קיימים פולינומים $q(x), r(x)$ כך ש- $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ כך ש $deg\ \ r < m$ או $r \equiv 0$.

25 משפט $bezout$: אם a הוא שורש של פולינום f, אזי $f(x)$ מתחלק ל - $x - a$ ללא שארית, ז"א: $f(x) = q(x) \cdot (x - a)$.

26 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של A. מתקיים: $1 \le k_\lambda \le n$.

27 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של A. מתקיים: $1 \le m_\lambda \le n$.

28 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של A. מתקיים: $k_\lambda \ge m_\lambda$.

29 וקטורים עצמיים המתאימים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים לינארית.

30 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם ל - A יש n ערכים עצמיים שונים, אזי A לכסינה.

31 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה כך ש- $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים. אזי: A לכסינה $\leftrightarrow$ לכל ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ של A מתקיים $m_\lambda = k_\lambda$.

32 תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם A לכסינה, אזי בהכרח $p_A(x)$ מתפרקת לחלוטין.

33 יהי $T: V \to V$ כך ש- $p_T(x)$ מתפרק לחלוטין. אזי: T ניתן ללכסון $\leftrightarrow$ לכל ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ של T מתקיים $m_\lambda = k_\lambda$.

34 יהי $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. אזי, מתקיים המשפט היסודי של אלגברה: כל פולינום מעל המרוכבים מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

35 מטריצה משולשת עליונה דומה למטריצה משולשת תחתונה.

36 קריטריון שילוש: מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ניתנת לשילוש אם ורק אם הפולינום האופייני $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

37 כל מספר חיובי ניתן להצגה יחידה $n = p_1 \cdot p_2 \cdots \cdot p_s$, כש- p_i מספרים ראשוניים.

38 כל פולינום $f(x)$ ניתן להצגה יחידה $f = p_1 \cdot p_2 \cdots \cdot p_s$, כש-$p_i$ פולינומים אי פריקים.

39 לכל m, n קיימים מספרים q, r כך ש- $m = q \cdot n + r$, כש- $0 < r < n$ או $r = 0$.

40 לכל f,g קיימים פולינומים q,r כך ש- $f=q\cdot g+r$, כש-$deg\, r<deg\, g$ או $r\equiv 0$.

41 לכל מטריצה קיים פולינום מאפס.

42 משפט קיילי המילטון: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. מתקיים $p_A(A)=0_{matrix}$.

43 לכל מטריצה קיים פולינום מינימלי יחיד.

44 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. מתקיים: $m_A(x)|p_A(x)$.

45 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.. יהי $f(x)$ פולינום מאפס ל - A. אז: לפולינום האופייני $p_A(x)$ מתקיים:
$p_A(x)|[f(x)]^n$.

46 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. מתקיים: $p_A(x)|[m_A(x)]^n$.

47 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.השורשים של $m_A(x)$ הם הערכים העצמיים של A.

48 תהי $A_{n\times n}$ מטריצה כך שיש לה n ערכים עצמיים שונים $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.
אז: $m_A(x)=p_A(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$.

49 תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הפולינום המינימלי מחלק כל פולינום שמתאפס ב - A.

50 נניח ש - $A,\tilde{A}$ מטריצות ריבועיות דומות. יהי $f(x)$ פולינום מאפס ל - A.
אז: $f(x)$ פולינום מאפס גם ל - A'.

51 למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי.

52 תהי A מטריצה אלכסונית בלוקים. יהיו $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$ פולינומים אופייניים של $A_1,\cdots,A_s$ ו - $m_1(x),\cdots,m_s(x)$ פולינומים מינימליים שלהן. אזי לפולינום האופייני $p_A(x)$ ולפולינום המינימלי $m_A(x)$ של A מתקיימים השוויונות הבאים:

- $p_A(x)=p_1(x)\cdots p_s(x)$.
- $m_A(x)=l.c.m(m_1(x),\cdots,m_s(x))$.

53 יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $\mathcal{R}=\mathbb{K}[x]$ חוג פולינומים (נתבונן בשתי פעולות חיבור, $\oplus$, וכפל, $\otimes$) במשתנה אחד. אזי מתקיים:

- האיברים ההפיכים ב - $\mathcal{R}$ הינם פולינומים קבועים (שונים מאפס) (כלומר, חוג דומה לשדה, פרט לתכונה לפיה לכל איבר שונה מאפס קיים איבר הופכי).
- ב - $\mathcal{R}=\mathbb{K}[x]$ אין מחלקי אפס (כלומר, אם $f\neq 0,g\neq 0$, אזי $f\cdot g=0$).

54 כל פולינום מתפרק למכפלה של פולינומים אי פריקים, והצגה זו יחידה, במובן הבא: לכל פולינום f קיימת הצגה בצורה $f=u\cdot g_1\cdots g_n$, כך ש u – פולינום הפיך (פולינום קבוע עפ"י ההערה לעיל) ו - $g_1,\cdots,g_n$ פולינומים אי פריקים, ואם $f=u'\cdot h_1\cdots h_m$ הצגה נוספת (u' הפיך ו $h_1,\cdots,h_m$ – אי פריקים), אזי: $n=m$ ומתקיים $g_i=h_i$ (עד כדי שינוי סדר של גורמים).

55 יהיו a,b פולינומים. אז: $g.c.d(a,b)$ קיים ויחיד.

56 יהיו a,b פולינומים . יהי $d=g.c.d(a,b)$. אזי קיימים $u,v\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:
$d=au+bv$.
לכן, אם $d=1$ (a,b זרים) אזי קיימים $u,v\in\mathbb{R}$ כך ש-$au+bv=1$.

57 יהיו a,b,c פולינומים. אם $a|bc$ ואם $g.c.d(a,b)=1$ אזי $a|c$.

58 יהיו b,c פולינומים. יהי p פולינום אי פריק. אזי, אם: $p|bc$ אז: $p|b$ או $p|c$.

59 לפולינומים במשתנה אחד מעל שדה, מתקיים פירוק יחיד. ז"א, אם:
$f=p_1\cdots p_m=q_1\cdots q_n$ כש - $p_1,\cdots,p_m$, $q_1,\cdots,q_n$ פולינומים אי פריקים, אזי $m=n$ ולכל i, $p_i=q_i$ (עד כדי כפל בקבוע ושינוי סדר של גורמים).

60 בעזרת פירוק יחיד, ניתן לנמק את הטענה הבאה: כל השורשים של הפולינום המינימלי של מטריצה A, הם הערכים העצמיים של A.

61 אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, אזי הפולינומים האי פריקים הם פולינומים לינאריים בלבד.

62 אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, אזי הפולינומים האי פריקים הם פולינומים לינאריים או פולינומים ריבועיים (ממעלה 2) בלבד.

63 אם $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$ או $\mathbb{F}$ שדה סופי, אזי קיימים אינסוף פולינומים אי פריקים, ויש פולינומים אי פריקים ממעלה כלשהי.

64 יהיו A,B מטריצות ריבועיות. אזי:

- $\{A\oplus B \text{ ע"ע של}\}=\{B \text{ ע"ע של}\}\cup\{A \text{ ע"ע של}\}$.
- $\det(A\oplus B)=\det(A)\cdot\det(B)$.
- $p_{A\oplus B}=p_A\cdot p_B$.
- $A\oplus B\sim B$.

65 משפט ז'ורדן: תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית. נניח שהפולינום האופייני $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי A דומה למטריצה $\mathcal{J}$ בצורה הבאה:

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix}\mathcal{J}_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathcal{J}_{n_t}(\lambda_t)\end{pmatrix}$$

. כשכל בלוק $\mathcal{J}_{n_i}(\lambda_i)$ הוא תא ז'ורדן,

כלומר:
$$\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$
($n_i\geq 1$, λ_i לא בהכרח שונים אחד מהשני).

בנוסף, המטריצה $\mathcal{J}$ היא יחידה (עד כדי סדר של הבלוקים).

ל $-\mathcal{J}$ קוראים צורת הז'ורדן של A.

66 אם $T: V \to V$ אופרטור לינארי כך ש - $p_T(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, אזי קיים בסיס של B כך שהמטריצה המייצגת $A = [T]_B$ היא מטריצת ז׳ורדן $\mathcal{J}$. קוראים ל - B בסיס מז׳ורדן. $\mathcal{J}$ יחידה עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

67 תהי $\mathcal{J}$ צורת הז׳ודרן של מטריצה A. נניח ש – $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. נסמן $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ כל הערכים העצמיים השונים של A. אזי:

- לכל A_i, הריבוי האלגברי שלו k_i שווה לסכום הגדלים של כל הבלוקים המכילים את λ_i.
- לכל A_i, הריבוי הגיאומטרי שלו m_i שווה למספר הבלוקים המכילים את λ_i.
- לפולינום המינימלי $m_A(x)$ מתקיים: $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdots (x-\lambda_s)^{d_s}$, כש- d_i הינו הגודל המקסימלי של הבלוק המכיל את λ_i.

68 אם $A_{n\times n}$ ניתנת ללכסון, אזי בצורת ז׳ורדן שלה יהיו בלוקים מגודל 1×1.

69 $A_{n\times n}$ לכסינה אם ורק אם $m_A(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$.

70 יהי $\mathbb{F} = \begin{cases}\mathbb{R} \\ \mathbb{C}\end{cases}$. יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב וקטורי.

נגדיר, לכל זוג וקטורים $v, w \in V$, את המכפלה הפנימית של v על w, $\langle v, w\rangle \in \mathbb{F}$, כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1 1.5 לינאריות ($Sesquilinear$)

$$< \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w > = \alpha_1 < v_1, w > + \alpha_2 < v_2, w >.$$

$$< v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 > = \overline{\beta_1} < v, w_1 > + \overline{\beta_2} < v, w_2 >.$$

2 הרמטיות ($Hermite$)

$$< v, w > = \overline{< w, v >}.$$

3 אי שליליות (או חיוביות)

$$< v, v > \in \mathbb{R}_{\geq 0}, < v, v > = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}.$$

71 מכפלה פנימית סטנדרטית ב - $\mathbb{F}^n$: יהי $V = \mathbb{C}^n = \left\{\begin{pmatrix}\gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}\right\}_{\gamma_i \in \mathbb{C}}$.

נגדיר: אם $w = \begin{pmatrix}\gamma_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_n'\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}\gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}$, אז $\langle v, w\rangle = \gamma_1 \overline{\gamma_1'} + \cdots + \gamma_n \overline{\gamma_n'}$.

$\langle . \rangle$ היא מכפלה פנימית.

72 מכפלה פנימית סטנדרטית ב - $\mathbb{F}^{m\times n}$: יהי $V = M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

נכתב על ידי יהונתן רגב

נגדיר: אם $A,B\in V$, אז $\langle A,B\rangle = tr(A^t\cdot \bar{B})$.

$\langle .\rangle$ היא מכפלה פנימית.

73 תכונות של נורמה: יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי, נורמה $||.||$ המושרית ממכפלה פנימית $\langle .\rangle$, מקיימת:

- הומוגניות: לכל $v\in V$, לכל $\alpha\in\mathbb{F}$: $||\alpha v|| = |\alpha|\cdot||v||$.
- אי שליליות: לכל $v\in V$: $||v||\geq 0$ ו- $||v|| = 0 \Leftrightarrow v=\vec{0}$.

אי שוויון המשולש: לכל $v,w\in V$: $||v+w||\leq ||v||+||w||$.

74 משפט פיתגורס: יהי V מרחב מכפלה פנימית.. יהיו $v,w\in V$. אם $<v,w>=0$, אז:

$||v+w||^2 = ||v||^2+||w||^2$.

75 אי שוויון קושי בוניאקובסקי שוורץ: יהי V מרחב מכפלה פנימית. יהיו $v,w\in V$. אזי:

1. $|\langle v,w\rangle|\leq ||v||\cdot||w||$.
2. $|\langle v,w\rangle| = ||v||\cdot||w|| \Leftrightarrow v,w$ תלויים לינארית.

76 אי שוויון המשולש: יהי V מרחב מכפלה פנימית. לכל $v,w\in V$ מתקיים: $||v+w||\leq ||v||+||w||$.

בנוסף, מתקיים שוויון אם ורק אם $w=\alpha\cdot v$, כאשר $\alpha\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ (תלות לינארית חיובית).

77 זהות פולארית ממשית: לכל $v,w\in V$:

$$<v,w> = \frac{1}{2}\cdot\left(||v+w||^2-||v||^2-||w||^2\right)$$

78 זהות פולארית ממשית (צורה נוספת): לכל $v,w\in V$:

$$<v,w> = \frac{1}{4}\cdot\left(||v+w||^2-||v-w||^2\right)$$

79 לכל $v,w\in V$ מתקיים: $Re(<v,w>) = Im(<v,-iw>)$.

80 זהות פולארית כללית: לכל $v,w\in V$:

$$<v,w> = \frac{1}{2}\cdot\left(||v+w||^2-||v||^2-||w||^2\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(||v+i\cdot w||^2-||v||^2-||w||^2\right)$$

81 כלל המקבילית: יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב מכפלה פנימית ותהי $\langle .\rangle$ מכפלה פנימית מעל V.

תהי $||.||$ הנורמה המושרית ע"י מכפלה פנימית זו. אזי לכל $v,w\in V$ מתקיים:

$$2\cdot\left(||v||^2+||w||^2\right) = ||v+w||^2+||v-w||^2$$

82 אם $||.||$ מקיימת את כלל המקבילית, אזי $||.||$ מושרית ממכפלה פנימית $\langle .\rangle$.

83 לכל $v\in V$: $v\perp 0$.

נכתב על ידי יהונתן רגב

84 לכל $v,w\in V$: אם $v\perp w$, אז: $w\perp v$.

85 לכל $v,w\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$: אם $v\perp w$, אז: $\alpha\cdot v\perp\beta\cdot w$.

86 אם $S\subset V$ קבוצה אורתוגונלית ו - $0\notin S$, אז S בלתי תלויה לינארית.

87 כל קבוצה אורתונורמלית היא בלתי תלויה לינארית.

88 יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי B בסיס עבור V. תהי G_B מטריצת גראם יחסית לבסיס B.
יהיו $v,w\in V$. אם: $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},[w]_B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$, אזי:

$$<v,w>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\cdot\beta_j\cdot g_{ij}=[v]_B^t\cdot G_B\cdot\overline{[w]_B}$$

89 יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהיו $B,\tilde{B}$ בסיסים עבור V. יהיו $G_B,G_{\tilde{B}}$ מטריצות גראם יחסית לבסיסים ו – P מטריצת המעבר בין הבסיסים. אזי: $G_{\tilde{B}}=P^t\cdot G_B\cdot\bar{P}$.

90 יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהיו $B,\tilde{B}$ בסיסים עבור V. יהיו $G_B,G_{\tilde{B}}$ מטריצות גראם יחסית לבסיסים. אזי: אם G_B הפיכה, אזי גם $G_{\tilde{B}}$ הפיכה.

91 יהי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהיו $B,\tilde{B}$ בסיסים עבור V. יהיו $G_B,G_{\tilde{B}}$ מטריצות גראם יחסית לבסיסים. אם: $\det(G_B)>0$. אזי: $\det(G_{\tilde{B}})>0$.

92 יהי V מרחב מכפלה פנימית . יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V. יהי $v\in V$.
נסמן $[v]_B$ את ההצגה של v יחסית לבסיס B: $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. אזי $\forall 1\le i\le n\ :\ \alpha_i=<v,v_i>$.

93 משפט פיתגורס: יהי V מרחב מכפלה פנימית . יהי B בסיס אורתונורמלי. יהי $v\in V$. נסמן:
$[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

אזי: $\left|\left|v\right|\right|^2=|\alpha_1|^2+\dots+|\alpha_n|^2$.

94 יהי V מרחב מכפלה פנימית. אם $B,\tilde{B}$ בסיסים אורתוגונליים אזי מטריצת המעבר P היא מטריצה אוניטרית.

95 תהי P מטריצה אוניטרית. אזי:

- השורות של P מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.
- העמודות של P מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{F}^n$.

להיפך, אם אחד מהתנאים הנ"ל מתקיים, אזי P אוניטרית.

96 יהי V מרחב מכפלה פנימית. תהי $S \subset V$ קבוצה. אזי: $S^\perp \subset V$ הוא תת מרחב ווקטורי של V.

97 יהי V מרחב מכפלה פנימית. תהי $S \subset V$ קבוצה. אזי: $S^\perp = \left(span(S)\right)^\perp$.

98 יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב מכפלה פנימית. יהי $W \subset V$ תת מרחב ווקטורי. אזי: $\pi_S: V \to W$ היא העתקה לינארית.

99 יהי $V_{/\mathbb{F}}$ מרחב מכפלה פנימית. יהי $W \subset V$ תת מרחב, $k = dimW$. יהי
$S = \{w_1, \cdots, w_k\}$ בסיס אורתוגונלי של W. יהי $v \in V$. אזי: $v \in W \Leftrightarrow \pi_S(v) = v$.

100 יהי V מרחב מכפלה פנימית . יהי $v \in V$. אזי: $z = v - \pi_S(v) \in W^\perp$.

101 תהליך גראם שמידט. ראה הרצאה 18.

102 כל קבוצה אורתונורמלית ניתנת להשלמה עד לבסיס אורתונורמלי.

103 אי שוויון בסל: יהי V מרחב מכפלה פנימית. תהי $\{e_1, \cdots, e_k\}$ קבוצה אורתונורמלית. יהי $v \in V$. נסמן $\alpha_i = < v, e_i >$ $(1 \le i \le k)$. אזי מתקים אי-שוויון:
$|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2 \le \left||v|\right|^2$. שוויון מתקיים אם ורק אם $v \in span\{e_1, \cdots e_k\}$.

104 יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $W \subset V$ תת מרחב. יהי $B = \{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ בסיס אורתוגונלי עבור V. יהי $W = span\{v_1, \cdots, v_k\}$. אזי: $W^\perp = span\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$.

105 $W = (W^\perp)^\perp$.

106 משפט הפירוק הניצב: יהי V מרחב מכפלה פנימית. לכל $W \subset V$, מתקיים:
$V = W \oplus W^\perp$.

107 יהי V מרחב מכפלה פנימית . יהי $v \in V$. ההיטל של v על W אינו תלוי בחירה של בסיס אורתוגונלי של W.

108 תכונות של מרחק: יהי V מרחב מכפלה פנימית. אזי, מתקיים:

- לכל $v, w \in V$: $d(v,w) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ ו- $d(v,w) = 0 \Leftrightarrow v = w$.
- לכל $v, w \in V$: $d(v,w) = d(w,v)$.
- לכל $v, w, u \in V$: $d(v,u) \le d(v,w) + d(w,u)$.

109 יהי V מרחב מכפלה פנימית . יהי $W \subset V$תת מרחב ווקטורי. יהי $v \in V$. אזי:
$d\left(v, \pi_W(v)\right) = min\{d(v,w): w \in W\}$.

110 יהיו V, W מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. נסמן: $dimV = n, dimW = m$.
תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. ההעתקה הצמודה ל- T, $T^*: W \to V$, מקיימת לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$: $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle$.

111 $T^*: W \to V$ קיימת ויחידה.

112 תהי $T^*: W \to V$ העתקה הצמודה ל- $T: V \to W$.
יהיו: $B = \{v_1, \cdots, v_n\}, B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ בסיסים אורתונורמליים עבור V, W.

נסמן ב - A, A' את המטריצות המייצגות של T, T^* ביחס לבסיסים B, B'.

אזי: $A' = A^* \ (= \bar{A}^t)$.

113 תכונות של ההעתקה הצמודה: יהי V מרחב מכפלה פנימית.

- לכל $T, S: V \to V$: $(T+S)^* = T^* + S^*$.
- לכל $T: V \to V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$: $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.
- לכל $T: V \to V$: $(T^*)^* = T$.
- לכל $T, S: V \to V$: $(T \cdot S)^* = S^* \cdot T^*$.

114 יהי V מרחב מכפלה פנימית. יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. נבחר בסיס אורתונורמלי B של V, ונתבונן במטריצה המייצגת $A = [T]_B$.

- T נורמלי $\Leftrightarrow$ A נורמלית.
- T אוניטרי $\Leftrightarrow$ A אוניטרית.
- T צמוד לעצמו $\Leftrightarrow$ A צמודה לעצמה.

115 $T: V \to V$ אופרטור נורמלי $\Leftrightarrow$ לכל $v \in V$ מתקיים $||T^*(v)|| = ||T(v)||$.

116 התכונות הבאות שקולות:

- $T: V \to V$ אופרטור אוניטרי.
- T שומר נורמה, כלומר: לכל $v \in V$: $||T(v)|| = ||v||$.
- T שומר מרחק, כלומר: לכל $v, w \in V$: $d\big(T(v), T(w)\big) = d(v, w)$.
- T שומר מכפלה פנימית, כלומר: לכל $v, w \in V$: $< T(v), T(w) > = < v, w >$.

117 יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. אופרטור אוניטרי שומר זוויות, כלומר: $\widehat{T(v), T(w)} = \widehat{v, w}$.

118 יהי $T: V \to V$ אופרטור נורמלי. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של T. יהי $v \in V$ ווקטור עצמי של T, המתאים לערך העצמי λ. אזי: אזי, $T^*(v) = \bar{\lambda} \cdot v$.

119 אם $T: V \to V$ אופרטור נורמלי, λ, μ ערכים עצמיים שונים של T, v ווקטור עצמי של T המתאים לערך העצמי λ, w ווקטור עצמי של T המתאים לערך העצמי μ, אז: $v \perp w$.

120 אם $T: V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, אזי כל הערכים העצמיים של T ממשיים.

121 אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ואם T אופרטור סימטרי (אופרטור צמוד לעצמו), אזי $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

122 אם $T: V \to V$ אופרטור אוניטרי, ואם λ ערך עצמי של T, אזי $|\lambda| = 1$.

123 אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ואם T אופרטור אורתוגונלי (אופרטור אוניטרי), אזי $\lambda = \pm 1$.

124 שילוש אוניטרי לאופרטורים: כל אופרטור $T: V \to V$, כך ש - $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, ניתן לשילוש אוניטרי, ז"א, קיים בסיס אורתונורמלי B של V כך ש - $A = [T]_B$ משולשת עליונה.

125 שילוש אוניטרי למטריצות: תהי A_0 מטריצה ריבועית כך ש - $p_{A_0}(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש - $A = P^{-1} \cdot A_0 \cdot P$ משולשת עליונה.

126 אם A מטריצה משולשת ונורמלית, אז A אלכסונית.

127 לכסון אוניטרי לאופרטורים: יהי $T: V \to V$ אופרטור נורמלי כך ש - $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי T ניתן ללכסון אוניטרי, ז״א, קיים בסיס אורתונורמלי B של V, כך ש - $A = [T]_B$ היא מטריצה אלכסונית.

128 לכסון אוניטרי למטריצות: תהי A מטריצה נורמלית כך ש - $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי A ניתנת ללכסון אוניטרי, ז״א, קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש - $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ מטריצה אלכסונית.

129 אם T ניתן ללכסון אוניטרי, אזי $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים ו $T -$ אופרטור נורמלי.

130 אם A ניתנת ללכסון אוניטרי, אזי $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים ו $A -$ מטריצה נורמלית.

131 יהי $T: V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו. אזי T ניתן ללכסון אורתוגונלי, ז״א, קיים בסיס אורתונורמלי B עבור V כך ש - $A = [T]_B$ מטריצה אלכסונית.

132 תהי A מטריצה סימטרית ממשית. אזי, A ניתנת ללכסון אורתוגונלי, ז״א, קיימת מטריצה אורתוגונלית P כך ש - $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ מטריצה אלכסונית.

133 אם A ניתנת ללכסון אורתוגונלי, אזי A מטריצה סימטרית.

134 נניח ש $A -$ מטריצה ממשית כך ש- $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי: A נורמלית אם ורק אם A סימטרית.

135 משפט הפירוק הספקטרלי: יהי $T: V \to V$ אופרטור נורמלי. נניח ש - $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

יהיו $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ ערכים עצמיים שונים של T. נסמן $V_i = V_{\lambda_i}$ המרחב העצמי של T המתאים לערך העצמי λ_i.

אזי: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$, ובנוסף $V_i \perp V_j$ לכל $1 \le i \ne j \le s$.

■