

## מבחן בקורס מכינה למתמטיקה לקראת שנת תשע"ד

מרצה: ארז שיינר. תאריך: 29/08/13

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=)

**1.** נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ x + |x| & -1 < x \leq 1 \\ x + 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי  $x$  מתקיים אי השוויון  $f(x) + |f(x)| \leq 1$

**2.**

א. מצאו את כל הפתרונות למשוואה  $z^2 - (1+i)^8 = 0$

ב. יהי  $w \in \mathbb{C}$  המקיים  $w^n = 1$  וגם  $w \neq 1$ . הוכיחו כי  $w^n + w^{n-1} + \dots + w = 0$ .

$$\text{(רמז: סכום סדרה הנדסית)} \quad (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

**3.** יהי  $v_1 = (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ . מצאו וקטור  $v_2 \in \mathbb{R}^3$  כך ש  $v_1 \perp v_2$  והמרחק בין  $v_1$  ל  $v_2$  הוא 1.

**4.** הוכיחו כי לכל  $2 \leq n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $3^n + 4^n \leq 5^n$

**5.** פתרו את האינטגרל  $\int \ln(\sqrt{x}) dx$  (רמז: הצבה  $\sqrt{x} = t$ )

**6.** הגדרה: פעולה  $\odot$  נקראת **אסוציאטיבית** אם היא מקיימת את התנאי

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} : (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהפעולה  $\odot$  אינה אסוציאטיבית

ב. קבעו והוכיחו אילו מן הפעולות הבאות הן אסוציאטיביות, ואילו לא:

$$x \oplus y = x^2 y^2, \quad x \otimes y = x + y - 1, \quad x \odot y = xy + x$$

(הערה: מותר להשתמש בעובדה שהכפל והחיבור הרגילים הם אסוציאטיביים)

**7.** הוכיחו כי לכל שתי קבוצות  $A, B$  מתקיים  $A/B \subseteq B/A \Leftrightarrow A \subseteq B$